

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

Учебно-методическое пособие для школьников

© К. Л. Самаров, 2010

Определение 1.

- Одна сотая доля числа a называется одним процентом от числа a ;
- k сотых долей числа a называются k процентами от числа a ;
- Число a называется базой для нахождения процентов.

По определению 1,

$$k \% \text{ от числа } a = \frac{k}{100} a. \quad (1)$$

Пример 1. Даны два числа a и b . Сколько процентов составляет число b от числа a ?

Решение. Заметим, что в примере 1 базой для нахождения процентов является число a , и предположим, что число b составляет x % от числа a . По формуле (1)

$$b = \frac{x}{100} a,$$

откуда легко вытекает, что

$$x = \frac{100 \cdot b}{a}. \quad (2)$$

Ответ. Число b составляет $\frac{100 \cdot b}{a}$ % от числа a .

Пример 2. Число увеличилось в 3,7 раза. На сколько процентов увеличилось это число?

Решение. Обозначим рассматриваемое число буквой a . При увеличении числа в 3,7 раза (т.е. умножении на 3,7) число a увеличивается на число b , причем

$$b = 3,7a - a = 2,7a.$$

По формуле (2)

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 2,7 \cdot a}{a} = 270.$$

Ответ. Число a увеличилось на 270 %.

Пример 3. Число уменьшилось в 2,5 раза. На сколько процентов уменьшилось это число?

Решение. Обозначим рассматриваемое число буквой a . При уменьшении числа в 2,5 раза (т.е. делении на 2,5) число a уменьшается на число b , причем

$$b = a - \frac{a}{2,5} = \frac{2,5 \cdot a - a}{2,5} = \frac{1,5 \cdot a}{2,5} = \frac{15 \cdot a}{25} = \frac{3 \cdot a}{5}.$$

По формуле (2)

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 3 \cdot a}{5 \cdot a} = 60.$$

Ответ. Число a уменьшилось на 60 %.

Пример 4. Число увеличилось на 5%. Во сколько раз увеличилось это число?

Решение. Обозначим рассматриваемое число буквой c , а буквой d – число c , увеличенное на 5%. Воспользовавшись формулой (1), получаем

$$d = c + 0,05 \cdot c = 1,05 \cdot c.$$

Ответ. Число увеличилось в 1,05 раза.

Пример 5. Число d на 15% меньше числа c . Какую часть составляет число d от числа c ?

Решение. Важно отметить, что в рассматриваемом примере *базой* для нахождения процентов является число c . В соответствии с формулой (1)

$$d = c - 0,15 \cdot c = 0,85 \cdot c.$$

Ответ. Число d составляет 0,85 числа c .

Пример 6. Налог на добавленную стоимость (НДС) равняется 18% цены товара. Найти цену товара, если товар с учетом НДС стоит 1652 руб.

Решение. Обозначим цену товара *без учета* НДС буквой a . Стоимость товара *с учетом* НДС составляет $100\% + 18\% = 118\%$ от a . Следовательно,

$$a \cdot 1,18 = 1652,$$

$$a = \frac{1652}{1,18} = 1400(\text{руб.})$$

Ответ. Цена товара без учета НДС равна 1400 руб.

Пример 7. В течение первого месяца цена товара увеличилась на 30%, а в течение следующего месяца *новая* цена товара уменьшилась на 10%. На сколько процентов изменилась *первоначальная* цена товара за 2 месяца?

Решение. Обозначим первоначальную цену товара буквой a . Поступая по аналогии с решением примера 4, получаем, что по истечении первого месяца цена товара стала равной $1,3 \cdot a$. По условию задачи за второй месяц новая цена товара, равная $1,3 \cdot a$ (база), уменьшилась на 10% и стала равной

$$1,3 \cdot a \cdot 0,9 = 1,17 \cdot a.$$

Ответ. Первоначальная цена товара за 2 месяца увеличилась на 17%.

Пример 8. В течение месяца цена товара увеличилась на 25%, а в течение следующего месяца цена товара возвратилась до первоначального уровня. На сколько процентов уменьшилась *новая* цена товара?

Решение. Обозначим первоначальную цену товара буквой c . Поступая по аналогии с решением примера 4, получаем, что по истечении месяца новая цена товара стала равной $1,25 \cdot c$. Следовательно, для того, чтобы вернуться к первоначальному уровню c , новая цена товара, равная $1,25 \cdot c$ (база), должна уменьшиться на число $0,25 \cdot c$. Для завершения решения примера остается определить, сколько процентов составляет число $0,25 \cdot c$ от числа $1,25 \cdot c$. Воспользовавшись формулой (1), получаем

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 0,25 \cdot c}{1,25 \cdot c} = 20.$$

Ответ. Новая цена товара уменьшилась на 20%.

Пример 9. Банковский вклад, не тронутый в течение года, в конце этого года увеличивается на 10%. На сколько процентов увеличится вклад, не тронутый в течение трех лет?

Решение. Обозначим первоначальную сумму вклада буквой a . Действуя по аналогии с решением примера 4, получаем, что по истечении первого года вклад станет равным $1,1 \cdot a$. По истечении второго года вклад станет равным $1,1 \cdot a \cdot 1,1 = 1,21 \cdot a$, а по истечении третьего года вклад станет равным

$1,21 \cdot a \cdot 1,1 = 1,331 \cdot a$. Таким образом, вклад, не тронутый в течение трех лет, увеличивается на число b , равное $0,331 \cdot a$. В соответствии с формулой (1.0.2.) первоначальная сумма вклада увеличивается на

$$x = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 0,331 \cdot a}{a} = 33,1 (\%).$$

Ответ. Вклад увеличится на 33,1 %.

Определение 2. *Месячным темпом инфляции* называется такое количество процентов, на которое возрастают цены товаров за месяц, по сравнению с предыдущим месяцем.

Пример 10. Месячный темп инфляции равен 5%. На сколько процентов возрастают цены за год?

Решение. Обозначим цену товара в первый день года буквой c . В соответствии с решением примера 4 через месяц после начала года цена товара будет равна $1,05 \cdot c$. Через два месяца после начала года цена товара будет равна

$$1,05 \cdot c \cdot 1,05 = 1,05^2 \cdot c .$$

Еще через месяц (т.е. через три месяца после начала года) цена товара будет равна

$$1,05^2 \cdot 1,05 \cdot c = 1,05^3 \cdot c ,$$

и т.д. Таким образом, через n месяцев после начала года цена товара станет равной

$$1,05^n \cdot c , \tag{3}$$

где $n = 1, 2, \dots, 12$. Проводя для $n = 12$ вычисления на калькуляторе, из формулы (3) получаем:

$$1,05^{12} \cdot c = 1,7959 \cdot c .$$

Следовательно, с начала года цена товара c увеличилась на число $0,7959 \cdot c$, т.е. на 79,59 %.

Ответ. Цены вырастают за год на 79,59%.

Замечание. Расчет по формуле (3), а также расчет, проведенный в решении примера 10, являются простейшими примерами расчетов по схеме *сложных процентов*.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Одно положительное число в 1,5 раза больше другого. Сколько процентов от суммы этих чисел составляет меньшее число?
2. Одно положительное число в 4 раза меньше другого. Сколько процентов от суммы этих чисел составляет большее число?
3. На сколько процентов надо уменьшить положительное число, чтобы получить число в 4 раза меньше исходного?
4. На сколько процентов надо увеличить положительное число, чтобы получить число в 2,5 раза больше исходного?
5. Цена товара была увеличена на 20 рублей, затем снижена на 20% и оказалась равной 64 рублям. Найти первоначальную цену товара.
6. Цена товара была уменьшена на 10 рублей, затем повышена на 25% и оказалась равной 75 рублям. Найти первоначальную цену товара.
7. На сколько процентов повышена цена товара, если исходная цена 150 рублей, а новая 180 рублей?
8. На сколько процентов снижена цена товара, если исходная цена 80 рублей, а новая 60 рублей?
9. Найти новую цену товара, если исходная цена 150 рублей была сначала повышена на 20%, а затем снижена на 20%.
10. Найти новую цену товара, если исходная цена 200 рублей была сначала снижена на 30%, а затем повышена на 30%.
11. Найти число, 28% которого равны 7.
12. Найти число, 18% которого равны 27.
13. Если цену товара снизить на 40%, то она уменьшится на 12 рублей. Найти исходную цену товара.

14. Если цену товара снизить на 7 рублей, то она уменьшится на 20%. Найти исходную цену товара.

15. Цена товара повышена на 150%. На сколько процентов надо снизить новую цену товара, чтобы цена товара вернулась к прежнему уровню?

16. Цена товара снижена на 20%. На сколько процентов надо повысить новую цену товара, чтобы цена товара вернулась к прежнему уровню?

17. 7% числа 200 равны 20% числа a . Найти число a .

18. 5% числа 300 равны 60% числа a . Найти число a .

19. На сколько процентов следует уменьшить радиус круга, чтобы его площадь уменьшилась на 19% ?

20. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

21. На экзамене по математике 20% студентов не решили ни одной задачи, 60% остальных студентов допустили ошибки или решили не все задачи. Сколько студентов сдавало экзамен, если 96 человек решили все задачи верно?