

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для школьников по математике

© С. С. Самарова, 2010

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{12}\right)^{x-2} = 3^{2x} \cdot 4^{2x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{12}\right)^{x-2} = 3^{2x} \cdot 4^{2x} &\Leftrightarrow 12^{2-x} = 3^{2x} \cdot 4^{2x} \Leftrightarrow 12^{2-x} = 12^{2x} \Leftrightarrow 2-x = 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$4^x - (p+2)2^x + 4p - 8 = 0 \quad (1)$$

имеет единственный корень.

Решение. Совершив замену переменного

$$2^x = y, \quad y > 0,$$

перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} y^2 - (p+2)y + 4p - 8 = 0 &\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{p+2 \pm \sqrt{(p+2)^2 - 4 \cdot (4p-8)}}{2} = \\ &= \frac{p+2 \pm \sqrt{p^2 + 4p + 4 - 16p + 32}}{2} = \frac{p+2 \pm \sqrt{p^2 - 12p + 36}}{2} = \\ &= \frac{p+2 \pm (p-6)}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{p+2-p+6}{2} = 4, \quad y_2 = \frac{p+2+p-6}{2} = \frac{2p-4}{2} = p-2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача свелась к решению двух уравнений: уравнения

$$2^x = 4 \quad (2)$$

а также уравнения

$$2^x = p-2 \quad (3)$$

Уравнение (2) при любом значении параметра p имеет корень: $x=2$. Следовательно, для того, чтобы уравнение (1) имело единственный корень, необходимо и доста-

точно, чтобы уравнение (3) корней вообще не имело, а это будет тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$p - 2 \leq 0 \Leftrightarrow p \leq 2.$$

Ответ: $p \leq 2$.

Пример 3. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$x^4 - (6 + p)x^2 + 9p - 27 = 0 \quad (4)$$

имеет ровно два корня.

Решение. Совершив замену переменного

$$x^2 = y, \quad y \geq 0,$$

перепишем уравнение (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} y^2 - (6 + p)y + 9p - 27 = 0 &\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{6 + p \pm \sqrt{(6 + p)^2 - 4 \cdot (9p - 27)}}{2} = \\ &= \frac{p + 6 \pm \sqrt{p^2 + 12p + 36 - 36p + 108}}{2} = \frac{p + 6 \pm \sqrt{p^2 - 24p + 144}}{2} = \\ &= \frac{p + 6 \pm (p - 12)}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{p + 6 - p + 12}{2} = 9, \quad y_2 = \frac{p + 6 + p - 12}{2} = \frac{2p - 6}{2} = p - 3. \end{aligned}$$

Таким образом, задача свелась к решению двух уравнений: уравнения

$$x^2 = 9, \quad (5)$$

а также уравнения

$$x^2 = p - 3 \quad (6)$$

Уравнение (5) при любом значении параметра p имеет два корня: $x_1 = 3, x_2 = -3$.

Следовательно, для того, чтобы уравнение (4) имело ровно два корня, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (6) корней вообще не имело, а это будет тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$p - 3 < 0 \Leftrightarrow p < 3.$$

Ответ: $p < 3$.

Пример 4. Решить уравнение

$$9^{x^2-x+\frac{1}{2}} = 3^{4-x}$$

Решение.

$$\begin{aligned} 9^{x^2-x+\frac{1}{2}} = 3^{4-x} &\Leftrightarrow 3^{2x^2-2x+1} = 3^{4-x} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 4 - x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-5}{4} = -1, x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-1; \frac{3}{2}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$3^x = 9 \cdot 3^{\sqrt{x}}$$

Решение.

$$\begin{aligned} 3^x = 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} &\Leftrightarrow 3^x = 3^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow x = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы решить уравнение

$$x - \sqrt{x} - 2 = 0,$$

совершим замену переменного

$$\sqrt{x} = y, \quad y \geq 0,$$

В результате этой замены исходное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x} - 2 = 0 &\Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_1 = \frac{1-3}{2} = -1, y_2 = \frac{1+3}{2} = 2. \end{aligned}$$

Поскольку $y \geq 0$, то случай $y_1 = -1$ должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 6. Решить уравнение

$$25^{x^2-4x-3} = (0,2)^{x+2}$$

Решение.

$$\begin{aligned} 25^{x^2-4x-3} = (0,2)^{x+2} &\Leftrightarrow 5^{2x^2-8x-6} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} \Leftrightarrow 5^{2x^2-8x-6} = 5^{-x-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 6 = -x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{7 - \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 - 9}{4} = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{7 + \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 + 9}{4} = 4. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}, 4$.

Пример 7. Решить уравнение

$$8^x - 9 \cdot 4^x + 20 \cdot 2^x = 0$$

Решение.

$$\begin{aligned} 8^x - 9 \cdot 4^x + 20 \cdot 2^x = 0 &\Leftrightarrow 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 20 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x (2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20) = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы решить уравнение

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0,$$

совершим замену переменного

$$2^x = y, \quad y > 0,$$

в результате которой получим:

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0 &\Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{9 - 1}{2} = 4, y_2 = \frac{9 + 1}{2} = 5 \Leftrightarrow 2^x = 4 \cup 2^x = 5 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = \log_2 5. \end{aligned}$$

Ответ: $2; \log_2 5$.

Пример 8. Решить уравнение

$$3^{x+2} - 3^{-x} = 8$$

Решение.

$$3^{x+2} - 3^{-x} = 8 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x - \frac{1}{3^x} - 8 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{18} = \frac{8 \pm 10}{18} \Leftrightarrow (3^x)_1 = \frac{8 - 10}{18} = -\frac{1}{9}, (3^x)_2 = \frac{8 + 10}{18} = 1.$$

Уравнение

$$3^x = -\frac{1}{9},$$

решений не имеет.

Решением уравнения

$$3^x = 1$$

является число $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{9^{x+\frac{1}{2}} - 2} = 3^{x+1} - 4$$

Решение. Сначала преобразуем уравнение к следующему виду:

$$\sqrt{9^{x+\frac{1}{2}} - 2} = 3^{x+1} - 4 \Leftrightarrow \sqrt{3^{2(x+\frac{1}{2})} - 2} = 3 \cdot 3^x - 4 \Leftrightarrow \sqrt{3^{2x+1} - 2} = 3 \cdot 3^x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3 \cdot 3^{2x} - 2} = 3 \cdot 3^x - 4.$$

Если теперь в полученном уравнении совершить замену переменного

$$3^x = y, \quad y > 0,$$

то оно примет вид

$$\sqrt{3y^2 - 2} = 3y - 4,$$

причем должно быть выполнено неравенство

$$3y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3y \geq 4 \Leftrightarrow y \geq \frac{4}{3}.$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{3y^2 - 2} = 3y - 4 &\Rightarrow 3y^2 - 2 = (3y - 4)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2 = 9y^2 - 24y + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6y^2 - 24y + 18 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = 3.\end{aligned}$$

Поскольку $y \geq \frac{4}{3}$, то первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 10. Решить уравнение

$$27^{7(x^2-3x)} = 9^{x^3-27}$$

Решение.

$$\begin{aligned}27^{7(x^2-3x)} = 9^{x^3-27} &\Leftrightarrow 3^{3 \cdot 7(x^2-3x)} = 3^{2(x^3-27)} \Leftrightarrow 21(x^2 - 3x) = 2(x^3 - 27) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(x^3 - 27) - 21(x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3)(x^2 + 3x + 9) - 21x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)[2(x^2 + 3x + 9) - 21x] = 0 \Leftrightarrow (x-3)[2x^2 - 15x + 18] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \cup 2x^2 - 15x + 18 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{15 - \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 - 9}{4} = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{15 + \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 + 9}{4} = 6.$$

Ответ: $\frac{3}{2}; 3; 6.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $22^{1-2x} = 2^{3x} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-3x}$

2. $35^{3+x} = 7^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x}$

3. $36^{2-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} \cdot 9^{3x}$

4. $25^{x^2-3x+\frac{3}{2}} = 5^{6-x}$

5. $36^{x^2-2x+\frac{1}{2}} = 6^{2-3x}$

6. $4^{x^2-2x+\frac{5}{2}} = 2^{10-x}$

7. $6 \cdot 36^x = 6^{3\sqrt{x}}$

8. $5^x = 125 \cdot 25^{\sqrt{x}}$

9. $64^{x+1} = 8^{5\sqrt{x}}$

10. $16^{x^2-x} = (0,25)^{3x-6}$

11. $(0,16)^{1-x^2} = (2,5)^{x+1}$

12. $25^{x^2} \cdot 5^x = (0,04)^{x-1}$

13. $27^x - 11 \cdot 9^x + 18 \cdot 3^x = 0$

14. $2 \cdot 8^x - 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$

15. $3 \cdot 27^x - 7 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x = 0$

16. $16^{\frac{1}{4}-x} - 7 \cdot 2^{-2x} - 4 = 0$

17. $6^{x+1} - 6^{-x} = 5$

18. $7^x - 7^{1-x} = 6$

19. $3^{4x} - 8 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 1 = 0$

20. $2^{6x} + 8^{x+\frac{2}{3}} - 5 = 0$

$$21. \quad 3^{6x-1} - 2 \cdot 27^{x-\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

$$22. \quad 3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - \frac{1}{5} = 0$$

$$23. \quad \sqrt{\frac{25^{x+1} + 2}{3}} = 2 - 5^{x+1}$$

$$24. \quad \sqrt{10 - 9^{2x+1}} = 5 - 6 \cdot 9^x$$

$$25. \quad \sqrt{\frac{2^{2x-4} + 1}{5}} = 2^{x-2} - 1$$

$$26. \quad \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 5^{2x-2} + \frac{1}{3}} = 2 \cdot 5^{x-1} - 1$$

$$27. \quad \sqrt{\frac{49^{x-1} + 1}{2}} = 1 - 14 \cdot 7^{x-2}$$

$$28. \quad \sqrt{10 \cdot 81^{x-\frac{1}{2}} - 1} = 15 \cdot 9^{x-1} - 2$$

$$29. \quad \sqrt{\frac{2^{2x+1} - 5}{3}} = 2^{x+1} - 5$$

$$30. \quad 8^{4(x^3+8)} = 16^{7(x^2+2x)}$$

$$31. \quad 125^{31(x^2+3x)} = 25^{3(x^3+27)}$$

$$32. \quad 32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}.$$

33. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$3 \cdot 9^x - (3p + 1)3^x + p = 0$$

имеет единственный корень.

34. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$x^8 - (p + 8)x^4 + 16p - 128 = 0$$

имеет ровно два корня.

35. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x - (20 + p)5^{-x} + 25p - 125 = 0$$

имеет единственный корень.

36. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$\frac{1}{x^4} - (p+1)\frac{1}{x^2} + 4p - 12 = 0$$

имеет ровно два корня.