Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для школьников по математике

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}. \qquad (1)$$

Решение. Разложим на множители квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе дроби из правой части уравнения. Для этого сначала нужно найти корни квадратного трехчлена:

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=-1.$$

Следовательно,

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

и уравнение (1) принимает форму

$$\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}. \qquad (2)$$

Область допустимых значений (ОДЗ) уравнений (1) и (2) имеет вид:

$$\{x\neq -1,\ x\neq -2\}.$$

Умножая обе части уравнения (2) на выражение

$$(x+1)(x+2),$$

и, производя необходимые сокращения, получаем:

$$3(x+1)-(2x-1)(x+2)=2x+1 \Leftrightarrow 3x+3-\left(2x^2-x+4x-2\right)=2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+3-2x^2+x-4x+2-2x-1=0 \Leftrightarrow -2x^2-2x+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 2}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=1.$$

Корень $x_1=-2$ не входит в ОДЗ и должен быть отброшен.

Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}+\frac{x^2+4x+9}{x-3}=-2 \qquad (3)$$

Решение. В результате замены переменного

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}=y,$$

совершенной в уравнении (3), получаем:

$$y+\frac{1}{y}=-2 \Rightarrow y^2+1=-2y \Leftrightarrow y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2=0 \Leftrightarrow y=-1.$$

Следовательно,

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}=-1 \Rightarrow x-3=-\left(x^2+4x+9\right) \Leftrightarrow x^2+4x+9+x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=-2.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению (3).

Ответ: $-3,\ -2.$

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0 \qquad (4)$$

Решение. Уравнение (4) проще всего решить при помощи замены переменного

$$\sqrt{2x^2+3x+9}=y\,. \qquad (5)$$

В этом случае

$$2x^2+3x+9=y^2$$

и уравнение (3) принимает вид

$$y^2-9-5y+3=0 \Leftrightarrow y^2-5y-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 7}{2} \Leftrightarrow y_1=-1,\ y_2=6.$$

В силу того, что переменная y, определенная по формуле (5), является неотрицательным числом, значение $y_1=-1$ должно быть отброшено. Следовательно,

$$y=6 \Rightarrow\ 2x^2+3x+9=y^2=36 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9-36=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x-27=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm 15}{4} \Leftrightarrow x_1=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2},\ x_2=3.$$

Ответ: $-\frac{9}{2}$, 3.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{x}{1-x}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=1 \qquad (5)$$

Решение. Уравнение (5) проще всего решить при помощи замены переменного

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}=y\,. \qquad (6)$$

В этом случае

$$\frac{x}{1-x}=y^2$$

и уравнение (5) принимает вид

$$y^2-\frac{3}{2}y-1=0 \Leftrightarrow 2y^2-3y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm 5}{4} \Leftrightarrow y_1=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2},\ y_2=2.$$

В силу того, что переменная y, определенная по формуле (6), является неотрицательным числом, значение $y_1=-\frac{1}{2}$ должно быть отброшено. Следовательно,

$$y=2 \Rightarrow\ \frac{x}{1-x}=y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=4 \Rightarrow x=4-4x \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x+2)^2 + \frac{24}{x^2+4x} = 18 \tag{7}$$

Решение. Уравнение (7) проще всего решить при помощи замены переменного

$$x^2 + 4x = y\,. \tag{8}$$

В этом случае

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = y + 4,$$

и уравнение (7) принимает вид

$$y + 4 + \frac{24}{y} = 18 \Leftrightarrow y + \frac{24}{y} - 14 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 14y + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{2} \Leftrightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 12.$$

При $y_1 = 2$ из формулы (8) получаем

$$x^2 + 4x = 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 - \sqrt{6},\ x_2 = -2 + \sqrt{6}.$$

При $y_2 = 12$ из формулы (8) получаем

$$x^2 + 4x = 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x_3 = -6,\ x_4 = 2.$$

Ответ: $-2-\sqrt{6};\quad -2+\sqrt{6};\quad -6;\quad 2$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{5-x} = x - 3 \tag{9}$$

Решение. Заметив, предварительно, что правая часть уравнения (9) должна быть неотрицательным числом и ОДЗ уравнения имеет вид:

$$x \ge 3, \tag{10}$$

возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{5-x} = x-3 \Rightarrow 5-x = x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

В силу (10) случай $x_1 = 1$ должен быть отброшен. Простая проверка показывает, что значение $x_2 = 4$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+5}{3x-1}} = \sqrt{x+2} \qquad (11)$$

Решение. Заметив, предварительно, что оба подкоренных выражения в уравнении (9) должны быть неотрицательными числами, возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{\frac{x+5}{3x-1}} = \sqrt{x+2} \Rightarrow \frac{x+5}{3x-1} = x+2 \Rightarrow x+5 = (x+2)(3x-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+5 = 3x^2+6x-x-2 \Leftrightarrow 3x^2+4x-7=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{6} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{7}{3},\ x_2 = 1.$$

Значение $x_1 = -\frac{7}{3}$ должно быть отброшено, поскольку в этом случае подкоренное выражение из правой части уравнения (11) отрицательно. Простая проверка показывает, что значение $x_2 = 1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 8. Решить уравнение

$$2x + \sqrt{\frac{7x^2+x}{x+1}} = 0. \qquad (12)$$

Решение. Переписывая уравнение (12) в виде

$$\sqrt{\frac{7x^2+x}{x+1}} = -2x, \qquad (13)$$

заметим, что правая часть уравнения (13) должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство

$$-2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0. \qquad (14)$$

Также, в силу запрета деления на нуль, должно выполняться соотношение

$$x \ne -1. \qquad (15)$$

Для того, чтобы найти корни уравнения (13), возведем обе его части в квадрат:

$$\frac{7x^2+x}{x+1} = 4x^2 \Rightarrow 7x^2 + x = 4x^2(x+1) \Leftrightarrow 4x^2(x+1) - 7x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left[4x(x+1) - 7x - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x\left[4x^2 + 4x - 7x - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x\left(4x^2 - 3x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \bigcup 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{3 \pm 5}{8} \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{4},\ x_3 = 1.$$

В соответствии с (14) значение $x_3 = 1$ должно быть отброшено. Простая проверка показывает, что значения $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{4}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $0;\ -\frac{1}{4}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}. \qquad (16)$$

Решение. В результате замены переменного

$$\sqrt{x} = y,\ \ y \ge 0, \qquad (17)$$

совершенной в уравнении (16), получаем:

$$\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3y - 3(y-2) - 2y(y-2)}{3y(y-2)} = 0 \Rightarrow 3y - 3(y-2) - 2y(y-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3y + 6 - 2y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow y_1 = -1,\ y_2 = 3.$$

В силу (17) значение $y_1 = -1$ должно быть отброшено. Для значения $y_2 = 3$ получаем:

$$\sqrt{x} = 3, \ \ x = 9.$$

Простая проверка показывает, что найденное значение является корнем исходного уравнения.

Ответ: 9.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + x\sqrt{26 - x^2}} = x - 2. \qquad (18)$$

Решение. Сначала заметим, что правая часть уравнения (18) должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство

$$x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2. \qquad (19)$$

Теперь возведем обе части уравнения (18) в квадрат:

$$\sqrt{4 + x\sqrt{26 - x^2}} = x - 2 \Rightarrow 4 + x\sqrt{26 - x^2} = (x-2)^2 \Leftrightarrow 4 + x\sqrt{26 - x^2} = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\sqrt{26 - x^2} = x^2 - 4x \Leftrightarrow x\sqrt{26 - x^2} - x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{26 - x^2} - x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \cup \sqrt{26 - x^2} - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \cup \sqrt{26 - x^2} = x - 4.$$

Остается решить уравнение

$$\sqrt{26 - x^2} = x - 4. \qquad (20)$$

Правая часть уравнения (20) должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство

$$x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4. \qquad (21)$$

Возводя обе части уравнения (20) в квадрат, получим:

$$\sqrt{26 - x^2} = x - 4 \Rightarrow 26 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1, \ x_3 = 5.$$

Итак, мы нашли три значения:

$$x_1 = 0, \ x_2 = -1, \ x_3 = 5.$$

В силу (19) и (21), значения x_1 и x_2 должны быть отброшены. Простая проверка показывает, что значение $x_3 = 5$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 5.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+2}=2.. \tag{22}$$

Решение. Возводя обе части уравнения (22) в квадрат, получим

$$\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+2}=2 \Rightarrow 3x+10-2\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2}+x+2=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x+8=2\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} \Rightarrow 2x+4=\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2}.$$

Теперь возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$2x+4=\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} \Rightarrow (2x+4)^2=(3x+10)(x+2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2+16x+16=3x^2+10x+6x+20 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: –2; 2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $1+\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2+3x}{x(x+2)}$,

2. $2+\dfrac{2t-1}{t+2}=\dfrac{4t+3}{2t+1}$,

3. $\dfrac{2y+1}{y-1}+\dfrac{y+1}{2y+1}=\dfrac{5y+4}{(y-1)(2y+1)}$,

4. $\sqrt{12-2x+x^2}=x+2$,

5. $\sqrt{-11+8x-x^2}=x-3$,

6. $\sqrt{\dfrac{x+10}{x+1}}=\sqrt{5x-6}$,

7. $x+\sqrt{\dfrac{x^2+8x}{x+3}}=0$,

8. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$,

9. $\dfrac{2}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-x}}$,

10. $3x=\sqrt{x^3+8x^2-6x}$,

11. $\dfrac{1-3x}{\sqrt{3x}}=\sqrt{x-\dfrac{1}{3}}$,

12. $x+\sqrt{x^3+2x^2-12x}=0$,

13. $\dfrac{3-4x}{\sqrt{x}}=\sqrt{8x-6}$,

14. $x^2-24-2\sqrt{x^2-24}=15$,

15. $13-x^2-2\sqrt{13-x^2}=3$,

16. $x^2-21-\sqrt{x^2-21}=2$,

17. $10-x^2-\sqrt{10-x^2}=6$,

18. $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}+1}+2\sqrt{x+1}=5$,

19. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{6}$,

20. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$,

21. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$,

22. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{3}{2}$,

23. $3\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}-\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=2$,

24. $\sqrt{4+x\sqrt{9x^2+16}}=-x+2$,

25. $2\sqrt{\dfrac{x+4}{1-2x}}-\sqrt{\dfrac{1-2x}{x+4}}=1$,

26. $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2-17}}=x-1$,

27. $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x+3}}=2$,

28. $x^2+4x+\dfrac{24}{x^2+4x}-17=0$,

29. $\left(x^2-2x\right)^2-2\left(x^2-2x\right)-3=0$,

30. $x^2-3x-\dfrac{8}{x^2-3x}+2=0$,

31. $\left(x^2-6x\right)^2+14\left(x^2-6x\right)+45=0$,

32. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.