Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Учебное пособие для школьников по математике

Пример 1. Решить уравнение

$$|2x+1|=3$$

Решение.

$$|2x+1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=3 \\ 2x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2 \\ 2x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Ответ. $1; -2$

Пример 2. Решить уравнение

$$\left|x^3-\frac{5}{2}x-2\right|=\left|x^3+x^2+\frac{3}{2}x+2\right|$$

Решение.

$$\left|x^3-\frac{5}{2}x-2\right|=\left|x^3+x^2+\frac{3}{2}x+2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-\frac{5}{2}x-2=x^3+x^2+\frac{3}{2}x+2 \\ x^3-\frac{5}{2}x-2=-\left(x^3+x^2+\frac{3}{2}x+2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+4=0 \\ 2x^3+x^2-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x\left(2x^2+x-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x=0 \\ 2x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=0 \\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=-1;\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ. $-2; -1; 0; \frac{1}{2}$

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{|x+3|-1}{x-1}=4$$

Решение.

$$\frac{|x+3|-1}{x-1}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|-1=4x-4 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|=4x-3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|=4x-3 \\ 4x-3\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4x-3 \\ 4x-3\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3=-(4x-3) \\ 4x-3\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=3x \\ x\geq \frac{3}{4} \\ x\neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3=-4x+3 \\ x\geq \frac{3}{4} \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x\geq \frac{3}{4} \\ x\neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ x\geq \frac{3}{4} \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Ответ. 2

Пример 4. Решить уравнение

$$|2x^2-4x|=3x-3$$

Решение.

$$|2x^2-4x|=3x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x^2-4x|=3x-3 \\ 3x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x=3x-3 \\ 3x-3\geq 0 \end{cases} \cup$$

$$\cup \begin{cases} -(2x^2-4x)=3x-3 \\ 3x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7x+3=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2-x-3=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4} \\ x\geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4} \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\frac{7\pm 5}{4} \\ x\geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4}=\frac{1\pm 5}{4} \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=3;\ \frac{1}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4}=-1;\ \frac{3}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \cup x=\frac{3}{2}$$

Ответ. $\frac{3}{2}$; 3

Пример 5. Решить неравенство

$$|x-3|<7$$

Решение.

$$|x-3|<7 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<7 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -(x-3)<7 \\ x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<10 \\ x\ge 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3>-7 \\ x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[3,10)\cup x\in(-4,3) \Leftrightarrow x\in(-4,10)$$

Ответ. $x\in(-4,10)$

Пример 6. Решить неравенство

$$6x^2-|x|-2\le 0$$

Решение. Заметим, что исходное неравенство эквивалентно объединению двух систем неравенств:

$$6x^2-|x|-2\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-x-2\le 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 6x^2+x-2\le 0 \\ x<0 \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Для этого сначала найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$6x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\frac{1\pm 7}{12} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{2}{3}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 6x^2-x-2\le 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$$

Теперь решим вторую систему неравенств. Для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$6x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\frac{-1\pm 7}{12} \Rightarrow x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=\frac{1}{2}$$

Далее получаем:

$$\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \le 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right] \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, 0 \right)$$

Объединение решений первой и второй систем неравенств дает ответ задачи.

Ответ. $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$

Пример 7. Решить неравенство

$$2x|x+1| - x - 1 > 0$$

Решение. Заметим, что исходное неравенство эквивалентно объединению двух систем неравенств:

$$2x|x+1| - x - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) - x - 1 > 0 \\ x + 1 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x(x+1) - x - 1 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x + 1 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x^2 - 3x - 1 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x \ge -1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 < 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

Теперь решим первую систему неравенств. Для этого сначала найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

Теперь решим вторую систему неравенств. Для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} 2x^2+3x+1<0 \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right) \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Таким образом, вторая система неравенств решений не имеет, и решение первой системы неравенств дает ответ задачи.

Ответ. $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

Пример 8. Найти множество значений параметра p, при которых уравнение

$$2px-2x-4|x-1|-1=0$$

имеет ровно два корня.

Решение. В случае $x\geq 1$ получаем

$$2px-2x-4|x-1|-1=0 \Leftrightarrow 2px-2x-4(x-1)-1=0 \Leftrightarrow 2px-6x+3=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x(p-3)=-3$$

Таким образом, при $p\neq 3$ решение уравнения имеет вид

$$x=\frac{-3}{2(p-3)}\ , \qquad (1)$$

а при $p=3$ уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку $x\geq 1$, то должно выполняться неравенство

$$\frac{-3}{2(p-3)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3}{p-3}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{-3}{p-3}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-2(p-3)}{p-3}\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-2p}{p-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2p-3}{p-3}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{p-\frac{3}{2}}{p-3}\leq 0 \Leftrightarrow p\in\left[\frac{3}{2},3\right)$$

В случае $x<1$ получаем

$$2px-2x-4|x-1|-1=0 \Leftrightarrow 2px-2x+4(x-1)-1=0 \Leftrightarrow 2px+2x-5=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x(p+1)=5$$

Таким образом, при $p \ne -1$ решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{5}{2(p+1)}, \qquad (2)$$

а при $p = -1$ уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку $x < 1$, то должно выполняться неравенство

$$\frac{5}{2(p+1)} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{p+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{5}{p+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 2(p+1)}{p+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-2p}{p+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2p-3}{p+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{p - \frac{3}{2}}{p+1} > 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Следовательно, в случае

$$p \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

исходное уравнение имеет 2 решения: решение, определяемое по формуле (1) и удовлетворяющее неравенству $x \ge 1$, и решение, определяемое по формуле (2) и удовлетворяющее неравенству $x < 1$.

Ответ. $p \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

Пример 9. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$x^2 + p|x| + \frac{7-6p}{4} = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Поскольку

$$x^2 + p|x| + \frac{7-6p}{4} = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + p|x| + \frac{7-6p}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - (7-6p)}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 6p - 7}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{(p+7)(p-1)}}{2},$$

то исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{-p+\sqrt{(p+7)(p-1)}}{2} \ge 0 \Leftrightarrow -p+\sqrt{(p+7)(p-1)} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{(p+7)(p-1)} \ge p.$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$\sqrt{(p+7)(p-1)} \ge p. \qquad (3)$$

Для того, чтобы решить неравенство (3), рассмотрим два случая.

В случае $p<0$ должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} (p+7)(p-1) \ge 0 \\ p<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-\infty,\ -7] \cup [1,\ +\infty) \\ p \in (-\infty,\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-\infty,\ -7].$$

Поскольку при этом левая часть неравенства (3) неотрицательна, а правая – отрицательна, то неравенство (3) верно.

В случае $p \ge 0$ обе части неравенства (3) можно возвести в квадрат:

$$\sqrt{(p+7)(p-1)} \ge p \Leftrightarrow (p+7)(p-1) \ge p^2 \Leftrightarrow 6p-7 \ge 0 \Leftrightarrow p \in \left[\frac{7}{6}, +\infty\right)$$

Объединение полученных областей дает ответ задачи.

Ответ. $p \in (-\infty,\ -7] \cup \left[\frac{7}{6}, +\infty\right)$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения

1. $|3x+2| = 1$
2. $|4x-1| = 1$
3. $|5x-2| = 2$
4. $\dfrac{3x-5}{|x-1|-4} = 1$
5. $\dfrac{|x-2|+1}{2x+1} = -1$
6. $\dfrac{7+3x}{|x+1|-6} = -1$
7. $|x^2-8x+12| = 3x-12$

8. $\left|x^2-4x\right|=3x-6$

9. $\left|x^2-2x-8\right|=8x-8$

10. $\left|x^2+8x\right|=6x+24$

11. $\left|x^2-2x-3\right|=3x-3$

12. $\left|x^2-3x\right|=4x-6$

13. $\left|x^2-x-2\right|=4x-2$

14. $\left|3x^3+12x+1\right|=\left|3x^3-18x^2-1\right|$

15. $\left|8x^3-5x-2\right|=\left|8x^3+4x^2+3x+2\right|$

16. $\left|8x+\frac{14}{x}-\frac{7}{x^3}\right|=\left|8x-\frac{18}{x}-\frac{5}{x^3}\right|$

17. $\left|-4x+\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^3}\right|=\left|-4x-\frac{3}{x}+\frac{5}{2x^3}\right|$

18. $\left|x^3+36x+9\right|=\left|x^3-18x^2-9\right|$

19. $\left|x^3+7x-\frac{14}{x}\right|=\left|x^3-9x-\frac{10}{x}\right|$

Решить неравенства

20. $\left|x-1\right|>3$

21. $\left|2x+1\right|<5$

22. $\left|3x-2\right|<4$

23. $(x-1)\left|x\right|-2x+2\le 0$

24. $x^2-3\left|x-1\right|-1\le 0$

25. $(x+4)\left|x\right|-3x-6>0$

26. $x^2-2\left|x\right|-3\ge 0$

27. $3x|2x-3|+7x-8<0$

28. $x^2-|5x+1|+5>0$

29. Найти множество значений параметра p, при которых уравнение

$$2px-4x+6|x-1|-3=0$$

имеет ровно два корня.

30. Найти множество значений параметра p, при которых уравнение

$$|x-2|+px+2x-1=0$$

не имеет корней.

31. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$x^2-p|x|+\frac{p^2-p-6}{4}=0$$

имеет ровно 4 различных корня.

32. Найти множество значений параметра p, при которых уравнение

$$|x-2|-px-x+1=0$$

не имеет корней.