

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Самарова С.С.

МФТИ, II курс, теория вероятностей

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ	1
ДИСПЕРСИЯ. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ	3
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСНОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	4
КОВАРИАЦИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ	11
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Самыми важными числовыми характеристиками случайной величины являются ее математическое ожидание, имеющее смысл среднего значения, и дисперсия, характеризующая разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Дадим определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

Определение 1. Математическим ожиданием $E\xi$ дискретной случайной величины ξ , принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, называют число, определяемое по формуле:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P\{\xi = x_k\}, \quad (1)$$

если ряд в правой части формулы (1) сходится абсолютно.

Замечание 1. Для математического ожидания случайной величины ξ также используют и обозначение $M\xi$, принятое, в основном, в отечественной литературе.

Замечание 2. В случае, когда случайная величина ξ принимает конечное число значений x_1, x_2, \dots, x_n с равными вероятностями, формула (1) превращается в среднее арифметическое возможных значений случайной величины ξ .

Замечание 3. Физическая интерпретация математического ожидания дискретной случайной величины ξ заключается в следующем. Введем обозначения

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и рассмотрим систему материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ с массами $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, расположенных в точках числовой оси с координатами $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ соответственно. Тогда формула (1), записанная в виде

$$E\xi = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k}$$

с учетом условия

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = 1$$

представляет собой координату центра масс системы материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$

Определение 2. Математическим ожиданием $E\xi$ непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ называют число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx, \quad (2)$$

если интеграл в правой части формулы (2) сходится абсолютно.

Теорема 1. Для случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, все компоненты которого являются дискретными случайными величинами со значениями

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}), \quad k_i = 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и произвольной функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \\ &= \sum_{\substack{k_1=1, \\ k_2=1, \\ \dots \\ k_n=1}}^{\infty} f(x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}) \cdot P(\xi_1 = x_{k_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{k_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{k_n}^{(n)}) \end{aligned} \quad (3)$$

при условии, что ряд в правой части формулы (3) сходится абсолютно.

Теорема 2. Для непрерывного случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с плотностью распределения $p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и произвольной функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет место равенство

$$Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_{R^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

при условии, что интеграл в правой части формулы (4) сходится абсолютно.

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) $E(C) = C$ для любой случайной величины, принимающей единственное значение C ;

2) $E(C \cdot \xi) = C \cdot E\xi$ для любого числа $C \in R$ и любой случайной величины ξ , имеющей математическое ожидание;

3) $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ для любых случайных величин ξ и η , имеющих математические ожидания;

4) $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$ для любых *независимых* случайных величин ξ и η , имеющих математические ожидания.

ДИСПЕРСИЯ. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Определение 3. *Дисперсией* $D\xi$ случайной величины ξ называют число, определяемое по формуле:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \quad (5)$$

если математическое ожидание в правой части формулы (5) существует.

Замечание. Использование свойств математического ожидания позволяет переписать формулу (5) в эквивалентном виде:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \quad (6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2) = \\ &= E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать

Дисперсия случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) $D\xi \geq 0$ для любой случайной величины, имеющей дисперсию;

2) $D(C) = 0$ для любой случайной величины, принимающей единственное значение C ;

3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$ для любого числа $C \in R$ и любой случайной величины ξ , имеющей дисперсию;

4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ для любых *независимых* случайных величин ξ и η , имеющих дисперсии.

Определение 4. Средним квадратическим отклонением $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ называют число, определяемое по формуле:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСНОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

На примере основных распределений дискретных и непрерывных случайных величин продемонстрируем приемы, наиболее часто применяемые для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайных величин.

Задача 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ , имеющей *геометрическое распределение с параметром p* ($0 < p < 1$).

Решение. Поскольку случайная величина ξ принимает значения 1, 2, 3, ... с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = p \cdot q^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где $q = 1 - p$, то для подсчета математического ожидания ξ воспользуемся формулой (1):

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \quad (7)$$

Ряд в правой части формулы (7) представляет собой производную степенного ряда для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q , поэтому

$$E\xi = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \quad (8)$$

Перейдём к вычислению $E\xi^2$. С этой целью выведем сначала формулу

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi \quad (9)$$

справедливую для случайных величин ξ , принимающих целые неотрицательные значения. Формулой (9) мы будем пользоваться далее неоднократно. Для того, чтобы получить формулу (9), воспользуемся формулой (3):

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi$$

Теперь преобразуем ряд, стоящий в правой части получившейся формулы:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = pq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq \left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k \right)' = pq \left(\frac{q^2}{1-q} \right)' = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$$

откуда с помощью формулы (8) получаем равенство:

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1+q}{p^2}$$

Из формулы (6) находим дисперсию $D\xi$:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

После того, как дисперсия вычислена, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ вычислить легко

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Ответ:

$$E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Задача 2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ , имеющей *биномиальное распределение с параметром p* ($0 < p < 1$).

Решение.

1 способ. Искомые характеристики можно вычислить непосредственно, используя формулу бинома Ньютона. Действительно, для дискретной случайной величины ξ , принимающей значения $0, 1, 2, 3, \dots, n$ с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n),$$

где $q = 1 - p$, то формуле (1) находим:

$$\begin{aligned}
E\xi &= \sum_{k=0}^n k \cdot p_k = \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot n!}{k! (n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = \\
&= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \cdot p^k q^{n-k} = \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l \cdot p^l q^{(n-1)-l} = np(p+q)^{n-1} = np .
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь найдем $D\xi$, действуя аналогично тому, как это было сделано при решении задачи 1. Поскольку

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n k(k-1)p_k &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1) \cdot n!}{k! (n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = n(n-1) \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} \cdot p^k q^{n-k} = \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} C_{n-2}^l \cdot p^l q^{(n-2)-l} = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2 ,
\end{aligned}$$

то из формул (9) и (10) получаем:

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi = n(n-1)p^2 + np = (np)^2 + npq$$

Теперь по формуле (6) находим дисперсию $D\xi$:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (np)^2 + npq - (np)^2 = npq . \tag{13}$$

Среднее квадратическое отклонение ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{npq} .$$

2 способ. Для получения характеристик биномиального распределения часто используют другой, более изящный, способ, не требующий проведения большого количества выкладок. Этот способ заключается в следующем. Рассмотрим n независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, каждая из которых может принимать только два значения 0 и 1, причем

$$P\{\xi_k = 1\} = p, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - p = q, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Тогда случайная величина

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

будет иметь биномиальное распределение с параметром p .

Действительно, ξ может принимать только значения $0, 1, 2, 3, \dots, n$. Выясним, с какой вероятностью принимается каждое из этих значений.

Для этого заметим, что случайная величина ξ принимает значение k в том, и только в том, случае, если k из n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равны 1, а остальные $n - k$ случайных величин равны 0. Число способов выбрать k случайных величин $\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots, \xi_{m_k}$ из n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равно C_n^k , причем вероятность того, что выбранные случайные величины $\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots, \xi_{m_k}$ равны 1, а остальные равны 0, в силу их независимости равна

$$p^k q^{n-k}$$

Поэтому,

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n).$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_1 :

$$E\xi_1 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p ;$$

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = pq .$$

Случайные величины ξ_2, \dots, ξ_n будут иметь такие же характеристики, поскольку они имеют то же самое распределение, что и ξ_1 .

Найдем теперь $E\xi$ и $D\xi$, используя свойства математических ожиданий и дисперсий случайных величин:

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = E\xi_1 + E\xi_2 + \dots + E\xi_n = nE\xi_1 = np ;$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n = nD\xi_1 = npq .$$

Ответ:

$$E\xi = np, \quad D\xi = npq, \quad \sigma(\xi) = \sqrt{npq} .$$

Задача 3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ , имеющей *распределение Пуассона с параметром* λ ($\lambda > 0$).

Решение. Случайная величина ξ принимает значения $0, 1, 2, 3, \dots$ с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

поэтому по формуле (1) с учетом разложения в ряд Тейлора функции $f(\lambda) = e^\lambda$ получаем:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda. \end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (9), с учетом формулы (11) получаем:

$$E\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi = \lambda^2 + \lambda.$$

Отсюда по формуле (6) находим дисперсию $D\xi$:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\lambda}.$$

Ответ:

$$E\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda, \quad \sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}.$$

Задача 4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ , имеющей *равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$.

Решение. Для вычисления математического ожидания $E\xi$ воспользуемся формулой (2), в которую подставим плотность равномерного распределения на отрезке $[a, b]$:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Вычислив $E\xi^2$ по формуле (4),

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

находим дисперсию $D\xi$ по формуле (6):

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Ответ:

$$E\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Задача 5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ , имеющей *показательное распределение с параметром* λ ($\lambda > 0$).

Решение. Подставляя в формулу (2) плотность показательного распределения с параметром λ

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

найдем математическое ожидание $E\xi$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda x}}{(-\lambda)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Теперь вычислим $E\xi^2$ по формуле (4):

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{-2x e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{2e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Найдем дисперсию $D\xi$ по формуле (6):

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda}$$

Ответ:

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

Задача 6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ , имеющей *нормальное распределение с параметрами a, σ ($\sigma > 0$)*.

Решение. Для того, чтобы найти математическое ожидание $E\xi$, подставим в формулу (2) плотность нормального распределения с параметрами a, σ :

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Сделав в полученном интеграле замену переменной

$$y = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}; \quad dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dx \tag{12}$$

и воспользовавшись равенствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2} dy = \frac{e^{-y^2}}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \quad (\text{интеграл Пуассона}),$$

находим

$$E\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y \cdot \sigma\sqrt{2} + a) e^{-y^2} dy = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2} dy + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = a$$

Для вычисления дисперсии $D\xi$ используем формулы (5) и (4):

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 p_\xi(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной (12), получаем

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-ye^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \sigma^2$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ равно

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sigma.$$

Ответ:

$$E\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \sigma(\xi) = \sigma.$$

КОВАРИАЦИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

В качестве числовых характеристик зависимости случайных величин используют их *ковариацию* и *коэффициент их корреляции*.

Определение 5. Ковариацией случайных величин ξ и η называют число, определяемое по формуле

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] \quad (13)$$

Замечание. Формулу (13) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta \quad (14)$$

Действительно, воспользовавшись свойствами математического ожидания случайных величин, получаем:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= E[\xi\eta - \eta \cdot E\xi - \xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta] = \\ &= E(\xi\eta) - 2E\xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Ковариация случайных величин обладает следующими *свойствами*, выполненными для любых случайных величин, имеющих дисперсию:

- 1) $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$;
- 2) $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
- 3) $\text{cov}(C\xi, \eta) = C \text{cov}(\xi, \eta)$ для любого числа $C \in R$;
- 4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 \text{cov}(\xi, \eta)$;
- 5) если случайные величины ξ и η *независимы*, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$.
- 6) справедливо неравенство

$$\text{cov}(\xi, \eta) \leq \sqrt{D\xi \cdot D\eta}.$$

Определение 6. Матрицей ковариаций случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называют матрицу с элементами $\{\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\}$.

Матрица ковариаций обладает следующими *свойствами*, вытекающими из свойств ковариации двух случайных величин:

- 1) матрица ковариаций является симметричной матрицей;
- 2) матрица ковариаций неотрицательно определена;
- 3) элементы, стоящие на главной диагонали матрицы ковариаций, неотрицательны.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 7. Случайные величины ξ и η независимы. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0,6]$, а случайная величина η имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,5$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi - \eta$.

Решение. Воспользовавшись свойствами математических ожиданий и дисперсий случайных величин, а также результатами задач 4 и 5, в которых вычислены характеристики равномерного и показательного распределений, получим

$$E(2\xi - \eta) = 2E\xi - E\eta = 2 \cdot \frac{(0 + 6)}{2} - 2 = 4;$$

$$D(2\xi - \eta) = 4D\xi + (-1)^2 \cdot D\eta = 4 \cdot \frac{(6-0)^2}{12} + 4 = 16.$$

Ответ: $E\eta = 4$, $D\eta = 16$.

Задача 8. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросаний игральной кости до первого выпадения «шестерки».

Решение. Пусть ξ – случайная величина, равная числу бросаний игральной кости до первого появления «шестерки». Тогда ξ может принимать значения 1, 2, 3, ... Выясним, с какой вероятностью принимается каждое из этих значений. Для этого обозначим через A_i событие, состоящее в том, что при i -ом бросании выпадает «шестерка». Тогда вероятность

$$p_k = P\{\xi = k\} = P\{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{k-1} A_k\} = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_{k-1}) \cdot P(A_k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Таким образом, случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{6}$. Воспользовавшись результатами задачи 1, получаем

$$E\xi = 6, D\xi = 30.$$

Ответ: $E\xi = 6$, $D\xi = 30$.

Задача 8. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$, а случайные величины $\eta_1 = \cos \xi$, $\eta_2 = \sin \xi$. Найти математические ожидания $E\eta_1$, $E\eta_2$ и ковариацию $\text{cov}(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли случайные величины η_1 и η_2 независимыми?

Решение. По формуле (2) математическое ожидание $E\eta_1$ равно

$$E\eta_1 = E(\cos \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x p_\xi(x) dx$$

Поскольку по условию случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, то ее плотность $p_\xi(x)$ имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } x \in [0, 2\pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Поэтому

$$E\eta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \frac{\sin x}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Действуя аналогичным образом, находим $E\eta_2$

$$E\eta_2 = E(\sin \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, p_\xi(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\frac{\cos x}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Теперь по формуле (14) вычислим ковариацию $\text{cov}(\eta_1, \eta_2)$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\eta_1, \eta_2) &= E(\eta_1\eta_2) - E(\eta_1)E(\eta_2) = E(\cos \xi \sin \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \sin x \, p_\xi(x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{8\pi} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что из того, что ковариация случайных величин оказалась равной нулю, еще не следует, что они независимы, и случайные величины η_1 и η_2 как раз подтверждают этот факт.

Действительно,

$$\begin{aligned} P\left(\eta_1 > \frac{1}{2}, \eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= P\left(\cos \xi > \frac{1}{2}, \sin \xi < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)\right) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} p_\xi(x) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} p_\xi(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$P\left(\eta_1 > \frac{1}{2}\right) = P\left(\cos \xi > \frac{1}{2}\right) = P\left(\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

$$P\left(\eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(\sin \xi < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)\right) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} p_{\xi}(x) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} p_{\xi}(x) dx + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$P\left(\eta_1 > \frac{1}{2}, \eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq P\left(\eta_1 > \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(\eta_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

В соответствии с определением независимости случайных величин заключаем, что случайные величины η_1 и η_2 не являются независимыми.

Ответ: $E\eta_1 = 0$, $E\eta_2 = 0$, $\text{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$, случайные величины η_1 и η_2 не являются независимыми.