

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Самарова С.С.

МФТИ, 2 курс, теория вероятностей

СОДЕРЖАНИЕ

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	1
МНОГОМЕРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ	3
НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	5
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	8

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто в практических задачах возникает необходимость рассмотрения нескольких случайных величин одновременно.

Определение 1. Конечный набор случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве, называют *случайным вектором* или *многомерной случайной величиной*.

Определение 2. Совместным распределением случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ или распределением случайного вектора называют вероятности

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) \quad (1)$$

где B_1, B_2, \dots, B_n – произвольные борелевские множества из $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что распределение случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ полностью задает распределение каждой его компоненты ξ_i . Для того, чтобы это доказать, достаточно в формуле (1) в качестве множеств B_j при всех $j \neq i$ выбрать интервалы $(-\infty, +\infty)$.

С другой стороны, как показывают следующие примеры 1 и 2, знание закона распределения каждой из компонент случайного вектора не определяет его распределение.

Пример 1. Рассмотрим две случайные величины ξ и η , которые могут принимать значения 0 или 1, причем их совместное распределение задается формулами:

$$\begin{aligned} P(\xi = 1, \eta = 1) &= 0,25; & P(\xi = 1, \eta = 0) &= 0,5; \\ P(\xi = 0, \eta = 1) &= 0,2; & P(\xi = 0, \eta = 0) &= 0,05. \end{aligned}$$

Тогда законы распределения случайных величин ξ и η имеют вид:

$$\begin{aligned}
 P(\xi = 1) &= P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 0) = 0,25 + 0,5 = 0,75; \\
 P(\xi = 0) &= P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 0) = 0,2 + 0,05 = 0,25; \\
 P(\eta = 1) &= P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 1) = 0,25 + 0,2 = 0,45; \\
 P(\eta = 0) &= P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 0) = 0,5 + 0,05 = 0,55.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Пример 2. Предположим теперь, что совместное распределение случайных величин ξ и η задано формулами:

$$\begin{aligned}
 P(\xi = 1, \eta = 1) &= 0,3; & P(\xi = 1, \eta = 0) &= 0,45; \\
 P(\xi = 0, \eta = 1) &= 0,15; & P(\xi = 0, \eta = 0) &= 0,1.
 \end{aligned}$$

Тогда законы распределения случайных величин ξ и η имеют вид:

$$\begin{aligned}
 P(\xi = 1) &= P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 0) = 0,3 + 0,45 = 0,75; \\
 P(\xi = 0) &= P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 0) = 0,15 + 0,1 = 0,25; \\
 P(\eta = 1) &= P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 1) = 0,3 + 0,15 = 0,45; \\
 P(\eta = 0) &= P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 0) = 0,45 + 0,1 = 0,55.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Сравнивая формулы (2) и (3), замечаем, что в примерах 1 и 2 распределения случайных величин ξ и η идентичны, в то время как совместные распределения пары случайных величин (ξ, η) были выбраны разными.

Задача 1. Закон распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид:

ξ :	-2	0	1	2
	0,1	0,5	0,1	0,3

Случайная величина $\eta = |\xi|$. Найти:

- 1) закон распределения случайной величины η ;
- 2) совместное распределение случайных величин ξ и η .

Решение. 1). Случайная величина $\eta = |\xi|$ может принимать значения 0, 1 и 2. Найдем вероятности, с которыми принимается каждое из этих значений:

$$\begin{aligned}
 P(\eta = 0) &= P(\xi = 0) = 0,5; & P(\eta = 1) &= P(\xi = 1) = 0,1; \\
 P(\eta = 2) &= P(\xi = -2) + P(\xi = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4.
 \end{aligned}$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $\eta = |\xi|$ имеет вид:

$$\eta:$$

0	1	2
0,5	0,1	0,4

2). Теперь найдем совместное распределение случайных величин ξ и η :

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0) = 0,5; \quad P(\xi = 0, \eta = 1) = P(\xi = 0, \eta = 2) = 0;$$

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1) = 0,1; \quad P(\xi = 1, \eta = 0) = P(\xi = 1, \eta = 2) = 0;$$

$$P(\xi = 2, \eta = 2) = P(\xi = 2) = 0,3; \quad P(\xi = 2, \eta = 0) = P(\xi = 2, \eta = 1) = 0;$$

$$P(\xi = -2, \eta = 2) = P(\xi = -2) = 0,1;$$

$$P(\xi = -2, \eta = 0) = P(\xi = -2, \eta = 1) = 0.$$

Поскольку ξ и η являются дискретными случайными величинами, то их совместное распределение удобно представить в виде таблицы:

$\eta \backslash \xi$	-2	0	1	2
0	0	0,5	0	0
1	0	0	0,1	0
2	0,1	0	0	0,3

Решение задачи 1 завершено.

МНОГОМЕРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Определение 3. *Функцией распределения случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ или многомерной функцией распределения называют функцию n переменных*

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, определяемую равенством

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n) \quad (4)$$

Важным классом случайных векторов являются абсолютно непрерывные случайные векторы.

Определение 4. Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называют *непрерывным (абсолютно непрерывным)*, если для него существует такая неотрицательная функция $p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}(R^n)$ выполнено равенство

$$P\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B\} = \int_B p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (5)$$

Функцию $p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *плотностью распределения случайного вектора* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ или *многомерной плотностью*.

Замечание. Далее рассматриваются только такие непрерывные случайные векторы, плотности распределения которых являются функциями, непрерывными на множестве R^n за исключением, быть может, конечного числа точек. Кроме того, здесь и далее рассматриваются только такие борелевские множества $B \in \mathfrak{B}(R^n)$, для которых интеграл, стоящий в правой части формулы (2), существует и совпадает с интегралом Римана.

В частности, для непрерывных случайных векторов из формул (4) и (5) вытекают следующие важные соотношения:

1. Для любых $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполнено равенство:

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad (6)$$

2. Многомерная плотность удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1 \quad (7)$$

3. Во всех точках непрерывности функции $p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполнено равенство:

$$p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (8)$$

4. Одномерные распределения и одномерные плотности компонент случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можно найти по формулам:

$$F_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_n \right) dt_k$$

$$p_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_n$$

НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называют *независимыми* (*независимыми в совокупности*), если для любых борелевских множеств B_1, B_2, \dots, B_n из $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ выполнено равенство:

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

Другими словами, случайные величины независимы, если для любых борелевских множеств B_1, B_2, \dots, B_n независимыми являются события

$$\{\xi_1 \in B_1\}, \dots, \{\xi_n \in B_n\}.$$

Из определения 5 следуют два важных *свойства* для функций распределения независимых случайных величин и плотностей распределения (в случае, когда независимые случайные величины были непрерывными).

1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполнено равенство

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) \quad (9)$$

2. Непрерывные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполнено равенство

$$p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot p_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(x_n) \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что равенство (10) легко получить из равенства (9) путем дифференцирования (см. формулу (8)).

Задача 2. Совместное распределение двух дискретных случайных величин ξ и η задано при помощи таблицы:

$\eta \backslash \xi$	-5	-1,5
-7	0,08	0,32
8	0,12	0,48

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Решение. Найдем одномерные распределения случайных величин ξ и η . Для того, чтобы найти закон распределения случайной величины η , сложим вероятности в каждой строке

таблицы и запишем результаты в дополнительном столбце справа. Для того, чтобы найти закон распределения случайной величины ξ , сложим вероятности в каждом столбце таблицы и запишем результаты в дополнительной строке снизу.

$\eta \backslash \xi$	-5	-1,5	
-7	0,08	0,32	0,4
8	0,12	0,48	0,6
	0,2	0,8	

Случайные величины ξ и η независимы в том, и только в том, случае, если вероятности, стоящие в каждой клетке исходной таблицы их совместного распределения равны произведению соответствующих вероятностей, записанных в дополнительной строке и дополнительном столбце. Непосредственная проверка показывает, что для рассматриваемого в задаче совместного распределения случайных величин ξ и η эти условия выполнены.

Ответ: случайные величины ξ и η независимы.

Задача 3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ . Найти плотность распределения случайных величин:

$$1) \eta_1 = \max \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \}, \quad 2) \eta_2 = \min \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \}.$$

Решение. 1). Функция распределения случайной величины η_1 имеет вид:

$$F_{\eta_1}(x) = P(\eta_1 \leq x) = P(\max \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \} \leq x) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq x, \dots, \xi_n \leq x).$$

Воспользовавшись независимостью случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, получаем:

$$\begin{aligned} F_{\eta_1}(x) &= P(\xi_1 \leq x, \dots, \xi_n \leq x) = P(\xi_1 \leq x) \cdot P(\xi_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \leq x) = \\ &= F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x). \end{aligned}$$

Поскольку все случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют одно и то же распределение, то их функции распределения равны между собой. Поэтому

$$F_{\eta_1}(x) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x) = \left(F_{\xi_1}(x) \right)^n.$$

Отсюда вытекает, что плотность распределения случайной величины η_1 равна

$$p_{\eta_1}(x) = F'_{\eta_1}(x) = n \cdot \left(F_{\xi_1}(x)\right)^{n-1} \cdot p_{\xi_1}(x) \quad (11)$$

Воспользовавшись формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (12)$$

задающей функцию распределения для показательного распределения с параметром λ , и формулой

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

задающей плотность показательного распределения с параметром λ , формулу (11) можно преобразовать к виду

$$p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda n \cdot e^{-\lambda x} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

2) Функция распределения случайной величины η_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} F_{\eta_2}(x) &= P(\eta_2 \leq x) = P(\min \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \leq x) = \\ &= 1 - P(\min \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} > x) = 1 - P(\xi_1 > x, \xi_2 > x, \dots, \xi_n > x). \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ (см. формулу (12)), получаем:

$$\begin{aligned} F_{\eta_2}(x) &= 1 - P(\xi_1 > x) \cdot P(\xi_2 > x) \cdot \dots \cdot P(\xi_n > x) = 1 - \left(P(\xi_1 > x)\right)^n = \\ &= 1 - \left(1 - F_{\xi_1}(x)\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda n x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что плотность распределения случайной величины η_2 равна

$$p_{\eta_2}(x) = F'_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda n e^{-\lambda n x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Ответ:

$$1) p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda n \cdot e^{-\lambda x} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

$$2) p_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda n e^{-\lambda n x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 , законы распределений которых известны. Часто при решении задач требуется выяснить, как распределена их сумма $\xi_1 + \xi_2$.

В случае, когда обе случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются непрерывными случайными величинами с плотностями $p_{\xi_1}(x)$ и $p_{\xi_2}(x)$ соответственно, можно получить формулу для плотности распределения их суммы. С этой целью рассмотрим функцию распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$:

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq x) = \iint_{y+z \leq x} p_{\xi_1, \xi_2}(y, z) dydz.$$

В силу независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 с помощью формулы (10) получаем:

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \iint_{y+z \leq x} p_{\xi_1, \xi_2}(y, z) dydz = \iint_{y+z \leq x} p_{\xi_1}(y) \cdot p_{\xi_2}(z) dydz \quad (13)$$

Сделаем в правой части формулы (11) замену переменных

$$y = s, \quad z = t - s,$$

и перейдем от двойного интеграла к повторным:

$$\iint_{t \leq x} p_{\xi_1}(s) \cdot p_{\xi_2}(t - s) dt ds = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s) \cdot p_{\xi_2}(t - s) ds \right) dt \quad (14)$$

Продифференцировав интеграл, стоящий в правой части формулы (14), по верхнему пределу, получим плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$:

$$p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s) \cdot p_{\xi_2}(x - s) ds \quad (15)$$

Замечание. Формула (15) означает, что плотность суммы двух непрерывных независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 является сверткой их плотностей $p_{\xi_1}(x)$ и $p_{\xi_2}(x)$.

Задача 4 (распределение суммы двух независимых непрерывных случайных величин).
Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин ξ и η , если ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, а η имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

Решение. Подставим плотности распределений ξ и η

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 < x < +\infty, \end{cases} \quad p_{\eta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ e^{-x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

в формулу (15) для плотности суммы двух независимых случайных величин:

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(s) \cdot p_{\eta}(x-s) ds = \int_0^1 p_{\eta}(x-s) ds \quad (16)$$

Замечая, что $p_{\eta}(x-s) \neq 0$ в том, и только в том случае, когда $s \leq x$, получим следующие результаты:

- 1) при $x < 0$ справедливо равенство $p_{\xi+\eta}(x) = 0$;
- 2) при $0 \leq x \leq 1$ формула (16) принимает вид

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_0^1 p_{\eta}(x-s) ds = \int_0^x e^{s-x} ds = e^{s-x} \Big|_0^x = 1 - e^{-x};$$

- 3) при $x > 1$

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_0^1 p_{\eta}(x-s) ds = \int_0^1 e^{s-x} ds = e^{s-x} \Big|_0^1 = e^{1-x} - e^{-x}.$$

Ответ:

$$p_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ e^{1-x} - e^{-x} & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Задача 5 (распределение суммы двух независимых случайных величин, одна из которых непрерывная, а другая дискретная). Случайные величины ξ и η независимы. Случайная величина ξ непрерывная и имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, а случайная величина η дискретная и задана законом распределения

$$\eta: \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 1 & 2 \\ \hline 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Найти закон распределения суммы $\xi + \eta$.

Решение. Выразим функцию распределения суммы случайных величин $\xi + \eta$ через функцию распределения случайной величины ξ , пользуясь независимостью случайных величин ξ , η и законом распределения случайной величины η :

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(x) &= P(\xi + \eta \leq x) = \\ &= P(\eta = -2, \xi \leq x + 2) + P(\eta = 1, \xi \leq x - 1) + P(\eta = 2, \xi \leq x - 2) = \\ &= P(\eta = -2)P(\xi \leq x + 2) + P(\eta = 1)P(\xi \leq x - 1) + P(\eta = 2)P(\xi \leq x - 2) = \\ &= 0,3 \cdot F_\xi(x + 2) + 0,2 \cdot F_\xi(x - 1) + 0,5 \cdot F_\xi(x - 2) \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти плотность распределения суммы случайных величин $\xi + \eta$, продифференцируем полученное равенство:

$$p_{\xi+\eta}(x) = F'_{\xi+\eta}(x) = 0,3 \cdot p_\xi(x + 2) + 0,2 \cdot p_\xi(x - 1) + 0,5 \cdot p_\xi(x - 2)$$

Ответ:

$$p_{\xi+\eta}(x) = 0,3 \cdot p_\xi(x + 2) + 0,2 \cdot p_\xi(x - 1) + 0,5 \cdot p_\xi(x - 2)$$

Задача 6 (распределение суммы двух независимых дискретных случайных величин). Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 , распределенных по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 .

Решение. Поскольку каждая из случайных величин ξ_1 и ξ_2 может принимать только целые неотрицательные значения, то и их сумма $\xi_1 + \xi_2$ может принимать только значения $0, 1, 2, 3, \dots$. Найдем вероятности, с которыми сумма $\xi_1 + \xi_2$ будет принимать эти значения. С учетом независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 и формулы

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

описывающей закон распределения случайной величины ξ , распределенной по закону Пуассона с параметром λ , для произвольного целого неотрицательного числа n получаем:

$$\begin{aligned}
 p_n &= P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{k=0}^n P\{\xi_1 = k, \xi_2 = n - k\} = \\
 &= \sum_{k=0}^n P\{\xi_1 = k\} P\{\xi_2 = n - k\} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} = \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k},
 \end{aligned}$$

где через C_n^k обозначено число сочетаний из n элементов по k элементов. Применение формулы бинома Ньютона позволяет получить окончательный результат:

$$p_n = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Таким образом, сумма $\xi_1 + \xi_2$ также имеет распределение Пуассона, параметр которого равен сумме $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ответ: сумма $\xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.