

# ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Самарова С.С.

МФТИ, II курс, теория вероятностей

## СОДЕРЖАНИЕ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ .....	1
ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА .....	3
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	3

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**Определение 1.** Пусть  $\xi$  — случайная величина, принимающая действительные значения. *Характеристической функцией случайной величины  $\xi$*  называют функцию

$$f_{\xi}(t) = E e^{it\xi}, \quad t \in R.$$

Для непрерывных случайных величин характеристическая функция выражается формулой

$$f_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx$$

и представляет собой преобразование Фурье от плотности распределения случайной величины  $\xi$ .

Для дискретных случайных величин характеристическая функция выражается формулой

$$f_{\xi}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(\xi = x_n) \tag{1}$$

где через  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  обозначены все значения случайной величины  $\xi$ .

Характеристическая функция случайной величины  $\xi$  обладает следующими свойствами:

1.  $f_{\xi}(0) = 1$  ;
2.  $|f_{\xi}(t)| \leq 1$  ,  $\forall t \in R$ ;
3.  $f_{\xi}(t)$  равномерно непрерывна на  $R$ ;
4. Для характеристической функции случайной величины  $\eta = a\xi + b$  , где  $a$  и  $b$  – константы, справедлива формула

$$f_{\eta}(t) = e^{ibt} f_{\xi}(at)$$

5. Существует взаимно-однозначное соответствие между функциями распределения случайных величин и их характеристическими функциями.
6. Если у случайной величины  $\xi$  существует математическое ожидание  $E\xi^k$  , то ее характеристическая функция  $f_{\xi}(t)$  дифференцируема  $k$  раз и справедлива формула

$$f_{\xi}^{(k)}(0) = i^k E\xi^k .$$

В частности,

- если случайная величина  $\xi$  имеет математическое ожидание  $E\xi$ , то
- если случайная величина  $\xi$  имеет дисперсию  $D\xi$ , то

$$E\xi = -if'_{\xi}(0);$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = -f''_{\xi}(0) + (f'_{\xi}(0))^2$$

7. Для независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  выполнено равенство

$$f_{\xi+\eta}(t) = f_{\xi}(t) \cdot f_{\eta}(t)$$

8. Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

с характеристическими функциями

$$f_{\xi_1}(t), f_{\xi_2}(t), \dots, f_{\xi_n}(t), \dots$$

Если при каждом  $t$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\xi_n}(t) = f(t) ,$$

причем функция  $f(t)$  непрерывна в нуле, то существует случайная величина  $\xi$ , для которой функция  $f(t)$  является характеристической функцией и для любого числа  $a$  имеет место сходимость

$$P(\xi_n < a) \rightarrow P(\xi < a) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

## ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Центральная предельная теорема является одной из основных теорем курса теории вероятностей.

**Центральная предельная теорема.** Если случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где  $a = E\xi_n$ ,  $\sigma^2 = D\xi_n$ .

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1 [задание 11 б), в)].** Вычислить характеристические функции для:

- 1) распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ ;
- 2) нормального распределения с параметрами  $a$  и  $\sigma$ .

*Решение.*

- 1) Пусть случайная величина  $\xi$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ .

Тогда  $\xi$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots$  с вероятностями

$$P(\xi = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины  $\xi$

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(\xi = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

2) Пусть случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(a, \sigma)$ , т.е. ее плотность распределения имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Рассмотрим случайную величину

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$$

Тогда

$$F_{\eta}(x) = P(\eta \leq x) = P\left(\frac{\xi - a}{\sigma} \leq x\right) = P(\xi \leq x\sigma + a) = F_{\xi}(x\sigma + a);$$

$$p_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = F'_{\xi}(x\sigma + a) \cdot \sigma = p_{\xi}(x\sigma + a) \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значит, случайная величина  $\eta$  распределена нормально с параметрами  $(0, 1)$ .

Найдем характеристическую функцию случайной величины  $\eta$

$$\begin{aligned} f_{\eta}(t) &= Ee^{it\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\eta}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (\cos tx + i \sin tx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx dx \end{aligned}$$

Заметим, что при каждом  $t$  вследствие нечетности функции

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx$$

интеграл

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx dx = 0$$

Таким образом,

$$f_{\eta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx dx$$

Формально продифференцировав этот интеграл по параметру  $t$ , получим

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \, dx$$

Поскольку этот интеграл сходится равномерно, то по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру заключаем, что

$$f'_\eta(t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \, dx$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} f'_\eta(t) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \Big|_0^{+\infty} - \frac{2t}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx \, dx = \\ &= -tf_\eta(t) \end{aligned}$$

С учетом свойства 1 составляем задачу Коши

$$f'_\eta(t) = -tf_\eta(t), \quad f_\eta(0) = 1,$$

решение которой имеет вид

$$f_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Применение свойства 4 позволяет найти характеристическую функцию случайной величины  $\xi$

$$f_\xi(t) = f_{\eta\sigma+a}(t) = e^{iat} f_\eta(\sigma t) = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Ответ: 1)  $f_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ ; 2)  $f_\xi(t) = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

**Задача 2 [задание 12].** Являются ли следующие функции характеристическими функциями и, если являются, то найти законы распределения, которым они соответствуют:

1.  $f(t) = \cos^2 t$ ;
2.  $f(t) = \cos(t^2)$ ;

$$3. f(t) = \frac{1}{2 - e^{it}}.$$

*Решение.*

1. Преобразуем функцию  $f(t)$

$$f(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t = \frac{1}{2} e^{it \cdot 0} + \frac{1}{4} (e^{it \cdot 2} + e^{it \cdot (-2)}) = \frac{1}{2} e^{it \cdot 0} + \frac{1}{4} e^{it \cdot 2} + \frac{1}{4} e^{it \cdot (-2)}$$

Воспользовавшись формулой (1), замечаем, что  $f(t)$  является характеристической функцией дискретной случайной величины  $\xi$ , которая принимает три значения 0, 2 и  $-2$  с вероятностями

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{2}; \quad P(\xi = 2) = \frac{1}{4}; \quad P(\xi = -2) = \frac{1}{4}.$$

2. Если функция  $f(t)$  является характеристической функцией какой-нибудь случайной величины, то по свойству 3 функция  $f(t)$  должна быть равномерно непрерывной на  $R$ .

Покажем, что функция

$$f(t) = \cos(t^2)$$

не является равномерно непрерывной на  $R$ . Для этого на языке кванторов запишем отрицание того, что функция  $f(t)$  является равномерно непрерывной на  $R$ :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists t_1, t_2 \quad |t_1 - t_2| < \delta \rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \geq \varepsilon$$

Найдем точки, в которых  $f(t) = 1$ :

$$\cos(t^2) = 1$$

$$t^2 = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = \sqrt{2\pi n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем точки, в которых  $f(t) = -1$ :

$$\cos(t^2) = -1$$

$$t^2 = -\pi + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$t = \sqrt{-\pi + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для одного и того же значения  $n$  обозначим

$$t_1 = \sqrt{2\pi n} \text{ и } t_2 = \sqrt{-\pi + 2\pi n},$$

тогда

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |1 - (-1)| = 2 = \varepsilon$$

$$|t_1 - t_2| = |\sqrt{2\pi n} - \sqrt{-\pi + 2\pi n}| = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{-\pi + 2\pi n}} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} < \delta \leftrightarrow n > \frac{\pi}{\delta^2}$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon = 2 : \forall \delta > 0 \exists t_1 = \sqrt{2\pi n}, t_2 = \sqrt{-\pi + 2\pi n},$$

$$n = \left\lceil \frac{\pi}{\delta^2} \right\rceil + 1, \quad |t_1 - t_2| < \delta \rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \geq \varepsilon$$

Таким образом,  $f(t)$  не является равномерно непрерывной на  $R$  и поэтому не может быть характеристической функцией.

3. Преобразуем функцию  $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{e^{it}}{2}}$$

Поскольку

$$\left| \frac{e^{it}}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

то по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно записать

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{e^{it}}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{itn}}{2^{n+1}}$$

Воспользовавшись формулой (1) для характеристической функции дискретной случайной величины, заметим, что функция  $f(t)$  является характеристической функцией случайной величины  $\xi$ , которая принимает значения

$$x_n = 0, 1, 2, \dots$$

с вероятностями

$$P(\xi = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Решение задачи закончено.

**Задача 3 [задание 18].** Случайная величина  $\xi_\lambda$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ . Найти

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right), \quad x \in R$$

*Решение.* Найдем характеристическую функцию случайной величины

$$\eta_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \xi_\lambda - \sqrt{\lambda}$$

Для этого воспользуемся формулой для характеристической функции случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ , полученной в задаче 1:

$$f_{\xi_\lambda}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

По свойству 4 характеристических функций

$$f_{\eta_\lambda}(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)} = e^{-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)}$$

Найдем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\eta_\lambda}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) - 1\right)} =$$



$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-it\sqrt{\lambda} + \lambda \left( \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-it\sqrt{\lambda} + it\sqrt{\lambda} - \frac{t^2}{2} + o(1)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2} + o(1)} = e^{-\frac{t^2}{2}} = f_{\eta}(t)$$

При решении задачи 1 мы установили, что, если характеристическая функция случайной величины  $\eta$  имеет вид

$$f_{\eta}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

то случайная величина  $\eta$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(0, 1)$ . Отсюда по свойству 8 характеристических функций получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) = P(\eta < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

*Ответ:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

**Задача 4 [задание 19].** Пусть  $\xi_{m,n}$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения

$$p_n(x) = \lambda n e^{-\lambda n x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda = \text{const} > 0$$

Найти предельное распределение при  $n \rightarrow \infty$  для случайной величины

$$\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \dots + \xi_{m,n}$$

*Решение.* Найдем сначала характеристическую функцию случайной величины  $\xi_{m,n}$

$$\begin{aligned} f_{\xi_{m,n}}(t) &= E e^{it\xi_{m,n}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda n e^{-\lambda n x} dx = \lambda n \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda n)x} dx = \\ &= \lambda n \left. \frac{e^{(it-\lambda n)x}}{it-\lambda n} \right|_0^{+\infty} = -\frac{\lambda n}{it-\lambda n} = 1 - \frac{it}{it-\lambda n} \end{aligned}$$

Поскольку случайные величины  $\xi_{m,n}$  независимы и одинаково распределены, то с учетом свойства 7 характеристических функций получаем

$$f_{\xi_n}(t) = f_{\xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \dots + \xi_{m,n}}(t) = f_{\xi_{1,n}}(t) \cdot f_{\xi_{2,n}}(t) \cdot \dots \cdot f_{\xi_{m,n}}(t) = \left(f_{\xi_{m,n}}(t)\right)^n = \left(1 - \frac{it}{it - \lambda n}\right)^n$$

Найдем характеристическую функцию предельного распределения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\xi_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{it}{it - \lambda n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(1 - \frac{it}{it - \lambda n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{itn}{it - \lambda n}} = e^{\frac{it}{\lambda}}$$

Характеристическая функция

$$f(t) = e^{\frac{it}{\lambda}}$$

является характеристической функцией дискретной случайной величины  $\xi$ , которая принимает единственное значение  $\frac{1}{\lambda}$  с вероятностью 1.

*Ответ:* Предельное распределение – это распределение случайной величины  $\xi$ , которая принимает единственное значение  $\frac{1}{\lambda}$  с вероятностью 1.

**Определение 2.** Пусть случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и имеют нормальное распределение с параметрами  $(0, 1)$ . Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

называют распределением  $\chi^2$  (хи-квадрат) с  $n$  степенями свободы.

**Задача 5 [задание 20].**

1. Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

2. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\chi_n^2 - E\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} \leq x\right), \quad x \in R$$

*Решение.*

1. Найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин  $\xi_k^2$

$$E\xi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \\
E\xi_1^4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3 \\
D\xi_k^2 &= E\xi_k^4 - (E\xi_k^2)^2 = 2
\end{aligned}$$

Поскольку существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi_1^2 + D\xi_2^2 + \dots + D\xi_n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = 0,$$

то к последовательности

$$\xi_1^2, \xi_2^2, \dots$$

применим закон больших чисел, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{n} - \frac{E\xi_1^2 + E\xi_2^2 + \dots + E\xi_n^2}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

Доказано.

2. Поскольку  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и одинаково распределены, то

$$E\chi_n^2 = E(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) = E\xi_1^2 + E\xi_2^2 + \dots + E\xi_n^2 = nE\xi_1^2 = n$$

$$D\chi_n^2 = D(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) = D\xi_1^2 + D\xi_2^2 + \dots + D\xi_n^2 = nE\xi_1^2 = 2n$$

Применяя центральную предельную теорему, получаем

$$P \left( \frac{\chi_n^2 - E\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} \leq x \right) = P \left( \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 - n}{\sqrt{2}\sqrt{n}} < x \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Решение задачи закончено.