Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Учебно-методическое пособие для школьников по математике

Пример 1. Сколько целых значений *x* удовлетворяет неравенству

$$x^4+40\le 14x^2\ ?$$

Решение. Сначала решим данное неравенство:

$$x^4+40\le 14x^2 \Leftrightarrow x^4-14x^2+40\le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\left(x^2-10\right)\le 0 \Leftrightarrow 4\le x^2\le 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\le |x|\le \sqrt{10} \Leftrightarrow \left\{-\sqrt{10}\le x\le -2\right\}\cup\left\{2\le x\le \sqrt{10}\right\}.$$

В найденной области содержатся следующие целые числа: -3, -2, 2, 3.

Ответ: 4.

Пример 2. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$(x-2)^4<9(x-2)^2$$

Решение. Сначала решим данное неравенство:

$$(x-2)^4<9(x-2)^2 \Leftrightarrow (x-2)^4-9(x-2)^2<0 \Leftrightarrow (x-2)^2\left[(x-2)^2-9\right]<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2\left[(x-2)-3\right]\left[(x-2)+3\right]<0 \Leftrightarrow (x-2)^2[x-5][x+1]<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-1,2)\cup(2,5)$$

В найденной области содержатся следующие целые числа: 0, 1, 3, 4. Их сумма равна 8.

Ответ: 8.

Пример 3. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x-5}\le 0$$

Решение. Сначала решим данное неравенство:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x-5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-5)+7(x+1)}{(x+1)(x-5)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+7x+7}{(x+1)(x-5)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+7}{(x+1)(x-5)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+6}{(x+1)(x-5)}\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,5).$$

В найденной области содержатся следующие целые числа: 0, 1, 2, 3, 4. Их сумма равна 10.

Ответ: 10.

Пример 4. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 \le \frac{3}{x}$$

Решение. Сначала решим данное неравенство:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 \le \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{3}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-27}{9x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{9x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}+9-\frac{9}{4}\right)}{9x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right]}{9x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x} \le 0 \Leftrightarrow x \in (0, 3].$$

В найденной области содержатся следующие целые числа: 1, 2, 3. Их сумма равна 6.

Ответ: 6.

Пример 5. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x - \frac{2}{x} + 1}$$

Решение. Во-первых, подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а, во-вторых, на нуль делить нельзя. Следовательно, справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{x} + 1 \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x} \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x} \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, 0) \cup [1, +\infty).$$

Ответ: $x \in [-2, 0) \cup [1, +\infty)$.

Пример 6. Найти область определения функции

$$y = \log_x \left(x^2 - 6x + 8 \right)$$

Решение. Во-первых, выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным. Во-вторых, основание логарифма должно быть положительным. В третьих, основание логарифма не может равняться 1. Следовательно, справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4) > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,2) \cup (4, +\infty).$$

Ответ: $x \in (0,1) \cup (1,2) \cup (4, +\infty).$

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{3}{2-x} > \frac{1}{x+3}$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, в котором удобно воспользоваться методом интервалов:

$$\frac{3}{2-x} > \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} - \frac{3}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2+3(x+3)}{(x+3)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2+3x+9}{(x+3)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x+7}{(x+1)(x-5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\left(x+\frac{7}{4}\right)}{(x+1)(x-5)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+\frac{7}{4}}{(x+1)(x-5)} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{7}{4}\right) \cup (-1, 5).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{4}\right) \cup (-1, 5).$

Пример 8. Решить неравенство

$$2x^3 - x^2 - x < 0$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, в котором удобно воспользоваться методом интервалов. Для этого разложим левую часть неравенства на множители:

$$2x^3 - x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x\left(2x^2 - x - 1\right) < 0.$$

Далее получаем

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 1.$$

Следовательно,

$$2x^3 - x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x\left(2x^2 - x - 1\right) < 0 \Leftrightarrow 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) < 0.$$

Воспользовавшись, теперь, методом интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 1).$

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{3x-8}{3x^2 - 5x - 2} < \frac{1}{x+1}$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду, в котором удобно воспользоваться методом интервалов. Для этого преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{3x-8}{3x^2 - 5x - 2} < \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3x-8}{3x^2 - 5x - 2} - \frac{1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-8)(x+1) - \left(3x^2 - 5x - 2\right)}{\left(3x^2 - 5x - 2\right)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 8x + 3x - 8 - 3x^2 + 5x + 2}{\left(3x^2 - 5x - 2\right)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-6}{\left(3x^2 - 5x - 2\right)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2 - 5x - 2\right)(x+1) > 0.$$

Далее получаем:

$$3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm 7}{6} \Leftrightarrow x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=2.$$

Следовательно,

$$\left(3x^2-5x-2\right)(x+1)>0 \Leftrightarrow 3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)<0.$$

Воспользовавшись, теперь, методом интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $x\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},2\right).$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько целых значений *x* удовлетворяет неравенству

$$19x^2>x^4+18\ ?$$

2. Сколько целых значений *x* удовлетворяет неравенству

$$x^4+180\le 29x^2\ ?$$

3. Сколько целых значений *x* удовлетворяет неравенству

$$25x^2>x^4+24\ ?$$

4. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$9(x+1)^2>(x+1)^4$$

5. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$(x+1)^4<16(x+1)^2$$

6. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$16(x+3)^2>(x+3)^4$$

7. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x}{x-2}\le\frac{3}{x+4}$$

8. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x}{x+2}+\frac{5}{x-4}\le 0$$

9. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x}{x-1} \le \frac{4}{x+5}$$

10. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \frac{5}{x} \le 0$$

11. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{4}{x} \ge \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

12. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{3}{x} \le 0$$

13. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$x^2 + \frac{27}{x} \le 0$$

14. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$x^2 \le \frac{125}{x}$$

15. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$x^2 + \frac{64}{x} \le 0$$

16. Найти сумму целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству

$$x^2 \le \frac{27}{x}$$

17. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{x}}$$

18. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{9 - 4x - \frac{2}{x}}$$

19. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{2x - \frac{4}{x} + 7}$$

20. Найти область определения функции

$$y = \log_{-x}\left(x^2 + 8x + 15\right)$$

21. Найти область определения функции

$$y = \log_{x}\left(x^2 - 7x + 10\right)$$

22. Найти область определения функции

$$y = \log_{-x}\left(x^2 + 5x + 6\right)$$

23. Решить неравенство

$$\frac{x-4}{x-2} < \frac{2}{x+1}$$

24. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} < \frac{2}{x+2}$$

25. Решить неравенство

$$\frac{x+6}{x-2} < \frac{3}{x-1}$$

26. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$$

27. Решить неравенство

$$\frac{1-x}{3+x} > \frac{3}{x+9}$$

28. Решить неравенство

$$\frac{2}{x-5} > \frac{3}{x+1}$$

29. Решить неравенство

$$\frac{x+4}{6-x} > \frac{2}{x+3}$$

30. Решить неравенство

$$3x^3 - 5x^2 - 2x < 0$$

31. Решить неравенство

$$\frac{6x+1}{2x-1} > \frac{3x+10}{x+2}$$

32. Решить неравенство

$$\frac{8x-1}{4x-1} > \frac{2x-5}{x-3}$$

33. Решить неравенство

$$\frac{2x+9}{2x^2+7x+3} < \frac{1}{x-1}$$

34. Решить неравенство

$$\frac{10x-3}{5x-1} < \frac{2x-7}{x-4}$$

35. Решить неравенство

$$\frac{4x+9}{4x^2+3x-1} > \frac{2}{2x-3}$$

36. Решить неравенство

$$\frac{3x+2}{6x-1} > \frac{x-2}{2x-5}$$

37. Решить неравенство

$$\frac{5x+4}{5x^2-6x+1} > \frac{1}{x-2}$$