ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ
«ШКОЛА «СВИБЛОВО»

Проектная работа
на тему:

«Движения плоскости вместо вычислений»

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 (МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ)

Полные решения задач для проведения интерактивных уроков

Автор проекта:
ученик 8 «В» класса
школы «СВИБЛОВО»
Самаров Сергей Евгеньевич

Руководитель проекта:
преподаватель математики
школы «СВИБЛОВО»
Шиленкова Елена Валентиновна

г. Москва, 2017 г.

Задача 7.1.1. **(Мост через реку).** Города A и B расположены на разных берегах реки. В каком месте нужно построить мост через реку, чтобы путь от города A до города B был кратчайшим?

Решение. Рассмотрим вектор $\bar{l}$, длина которого равна ширине реки, перпендикулярный к берегу реки и направленный из точки A к реке. В результате сдвига на вектор $\bar{l}$ точка A переходит в точку A_1. Если обозначить буквой C точку пересечения отрезка A_1B с берегом реки, то, как показано на рис.3, через точку C и нужно построить мост CD через реку.

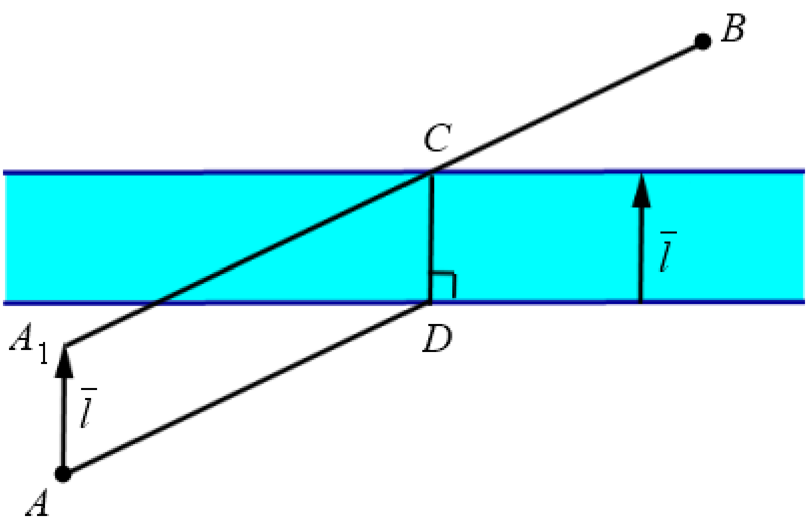

Рис. 3

Поскольку длина отрезка A_1B есть кратчайшее расстояние между точками A_1 и B, а четырехугольник AA_1CD – параллелограмм, то

$$AA_1 + A_1C = AD + DC,$$

и кратчайшим путем, ведущим из города A в город B, является путь $A \to D \to C \to B$, проходящий через мост DC.

Задача 7.2.1. **(Построение отрезка с заданной серединой).** Дан острый угол ABC с вершиной B и точка D внутри него. Найти на сторонах угла такие точки E и F, чтобы точка D была серединой отрезка EF.

Решение. В результате центральной симметрии относительно точки D точка B переходит в центрально симметричную точку B_1, луч BC переходит в параллельный луч B_1C_1, луч AB переходит в параллельный луч B_1A_1. Если обозначить буквой E точку пересечения лучей AB и B_1C_1 и обозначить буквой F

точку пересечения лучей BC и B_1A_1, то мы получим четырехугольник BEB_1F, который в силу параллельности противоположных сторон является параллелограммом (рис.4).

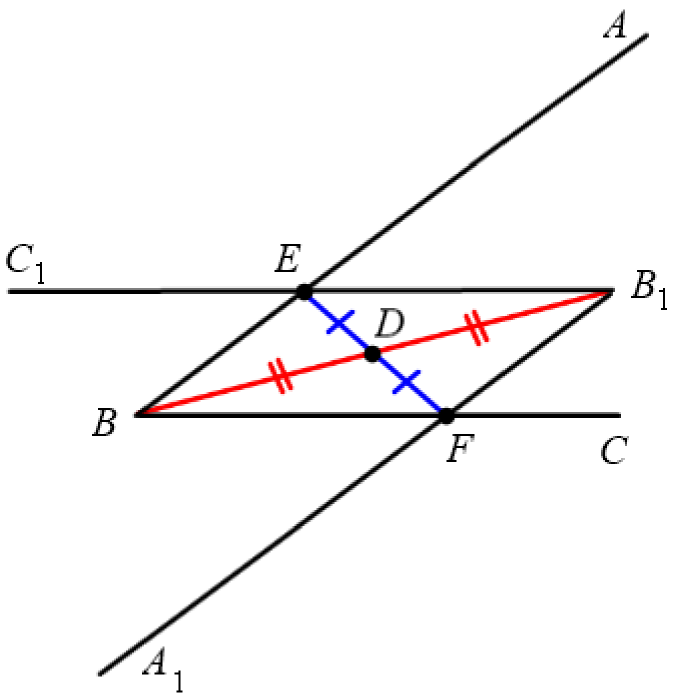

Рис.4

Диагонали BB_1 и EF этого параллелограмма пересекаются в точке D и делятся этой точкой пополам, что и требовалось.

Задача 7.2.2. **(Две касающиеся окружности).** Две окружности с центрами O_1 и O_2 и равными радиусами R касаются внешним образом в точке A. Точки B и C лежат на разных окружностях, причем хорды BA и CA перпендикулярны. Доказать, что расстояние BC равно $2R$.

Решение. В результате центральной симметрии относительно точки A окружности переходят друг в друга, точка B переходит в центрально симметричную точку B_1, точка C переходит в центрально симметричную точку C_1 (рис.5).

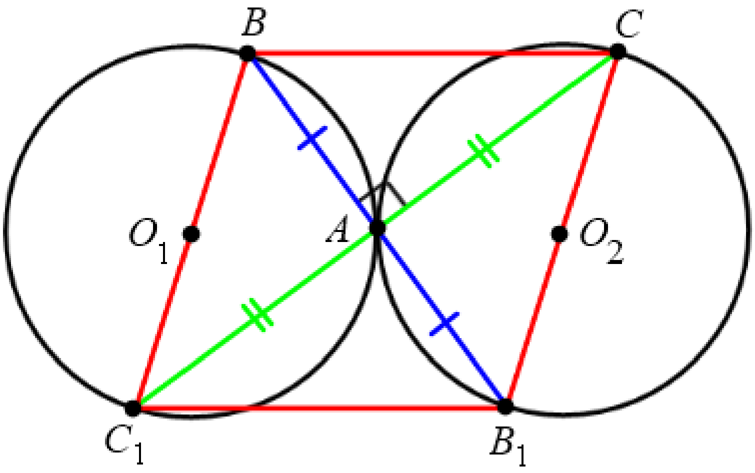

Рис.5

Поскольку в четырехугольнике BCB_1C_1 диагонали BB_1 и CC_1 перпендикулярны и делятся точкой A пополам, то четырехугольник BCB_1C_1 – ромб. Так как вписанный угол BAC_1 равен 90^0, то BC_1 – диаметр, откуда вытекает, что все стороны ромба и, в частности, сторона BC равны $2R$, что и требовалось доказать.

Задача 7.3.1. **(Восстановление квадрата).** Восстановить квадрат $ABCD$, если известен его центр O и точки F и E, расположенные на сторонах AB и BC соответственно.

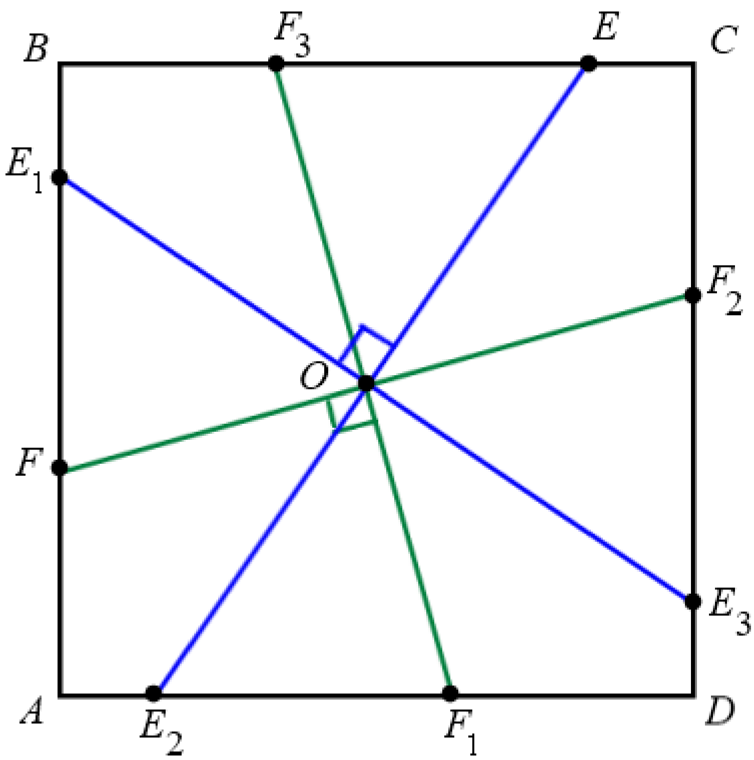

Рис.6.

Решение. В результате трех последовательных поворотов плоскости вокруг точки O против хода часов на угол 90^0 точка F переходит сначала в точку F_1, затем в точку F_2, потом в точку F_3, а точка E переходит сначала в точку E_1, затем в точку E_2, потом в точку E_3 (рис.6). Проводя прямые FE_1, F_3E, $F\ E_3$ и F_1E_2, мы восстанавливаем квадрат $ABCD$.

Замечание. В случае, когда точки E_1 и F различны, задача имеет единственное решение. Если же точки E_1 и F совпадают, то задача имеет бесконечно много решений.

Задача 7.3.2. (Построение равностороннего треугольника). Дан острый угол ABC с вершиной B и точка D внутри него. На сторонах угла AB и BC найти точки E и F так, чтобы треугольник DEF был равносторонним.

Решение. В результате поворота плоскости вокруг точки D по ходу часов на угол 60^0 точка B переходит в точку B_1, а лучи BA и BC переходят в лучи B_1A_1 и B_1C_1 соответственно (рис.7).

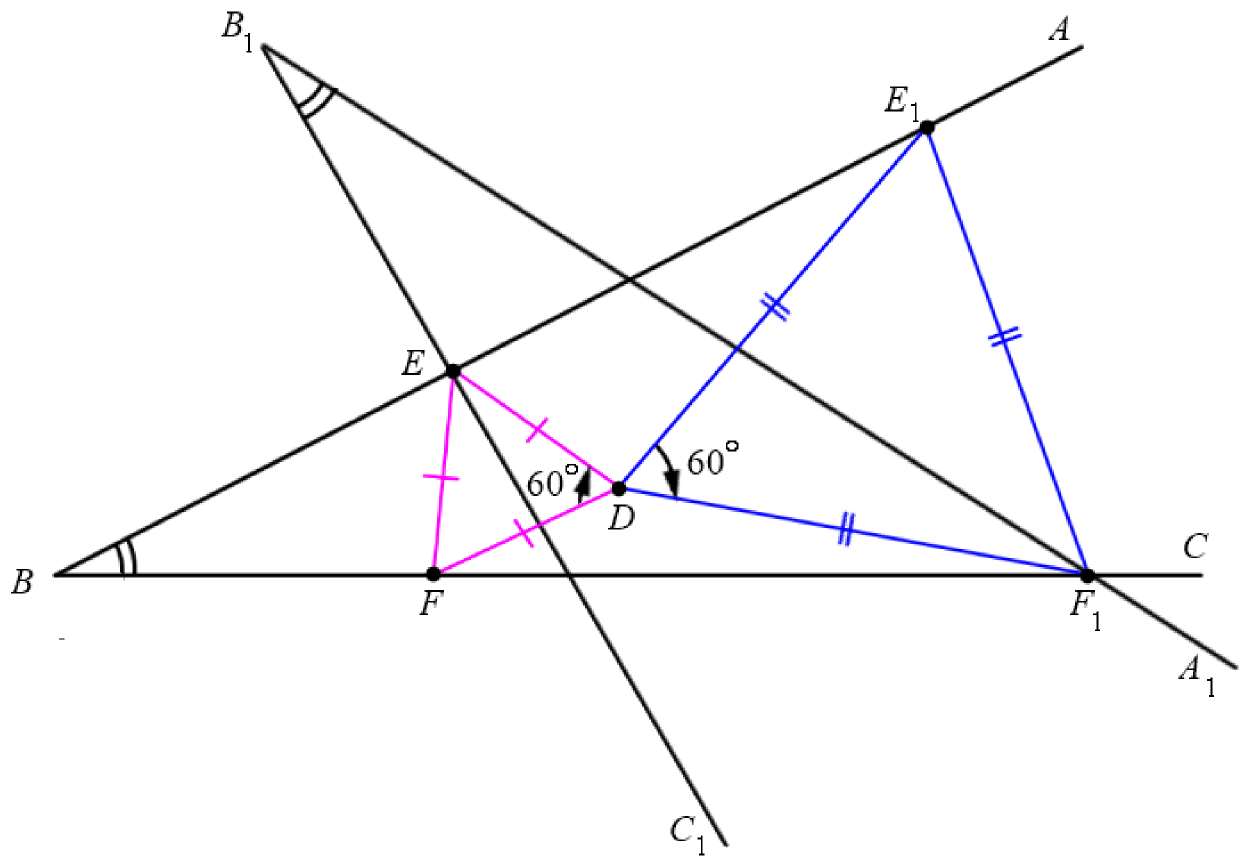

Рис.7

Точка пересечения лучей BA и B_1C_1, обозначенная на рис. 7 буквой E, является вершиной равностороннего треугольника EDF. По точкам E и D строим равносторонний треугольник EDF. Точка пересечения лучей BC и B_1A_1, обозначенная на рис. 7 символом F_1, является вершиной равностороннего треугольника E_1DF_1. Треугольник E_1DF_1 строим по точкам E_1 и F_1. Задача имеет 2 решения.

Задача 7.3.3. (Точки Торричелли и Ферма). Дан остроугольный треугольник. Точкой **Ферма** называют такую точку, расположенную внутри треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Точкой **Торричелли** называют такую точку, расположенную внутри треугольника, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в 120^0 . Доказать, что точки **Торричелли** и **Ферма** совпадают и построить точку **Торричелли-Ферма**.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и произвольную точку D внутри него. В результате поворота треугольника ADB вокруг точки A против хода часов на угол 60^0 точки D и B переходят в точки D_1 и B_1 соответственно (рис.8).

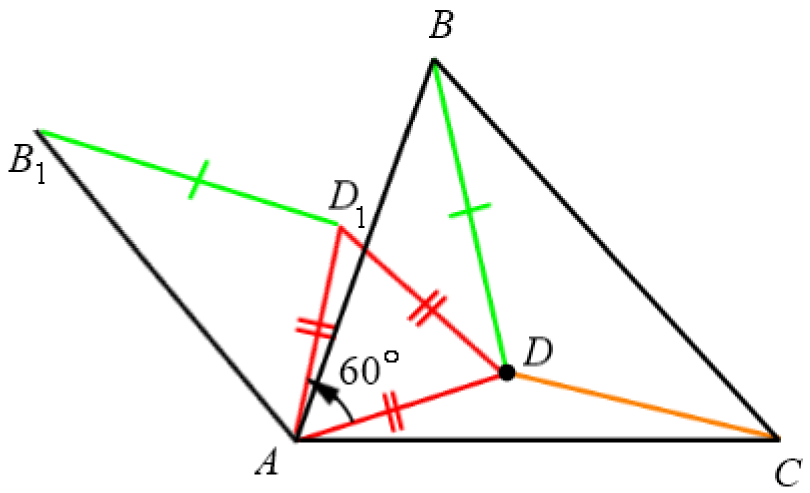

Рис.8

При этом $AD = AD_1$, $\angle DAD_1 = 60^0$ и треугольник ADD_1 – равносторонний, кроме того $AB = AB_1$, $\angle BAB_1 = 60^0$ и треугольник с вершинами A, B, B_1 – равносторонний. Поскольку при повороте треугольник ADB переходит в треугольник AD_1B_1, то эти треугольники равны, откуда вытекает, что $DB = D_1B_1$. Таким образом, справедливо равенство:

$$DB + DA + DC = B_1D_1 + D_1D + DC,$$

из которого следует, что сумма расстояний от точки D до вершин треугольника ABC будет минимальной, если длина ломаной линии $B_1 \to D_1 \to D \to C$ будет минимальной, а это произойдет в том случае, когда ломаная $B_1 \to D_1 \to D \to C$ станет отрезком B_1C, на котором лежат точки D и D_1 (рис. 9).

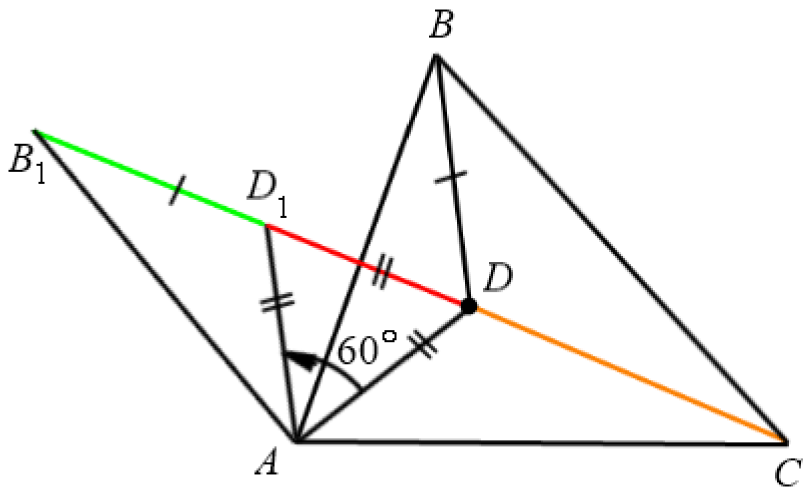

Рис.9

В случае, когда точки D и D_1 лежат на отрезке B_1C, то, как показано на рис. 9, угол AD_1B_1 является внешним углом равностороннего треугольника AD_1D, откуда вытекает, что он равен 120^0. Из равенства треугольников ADB и AD_1B_1 следует, что и угол ADB также равен 120^0. Тем самым доказано, что сторона AB видна из точки D под углом в 120^0. Докажем, что и стороны AC и BC видны из точки D под углом в 120^0. Действительно,

$$\angle ADC = 180^0 - \angle ADD_1 = 180^0 - 60^0 = 120^0,$$
$$\angle BDC = 360^0 - \angle ADB - \angle ADC = 360^0 - 120^0 - 120^0 = 120^0,$$

Следовательно, точка D является как точкой **Торричелли,** так и точкой **Ферма.** Для того чтобы построить эту точку, нужно сначала с помощью поворота построить точку B_1, а затем на прямой B_1C выбрать такую точку D, чтобы угол ADB_1 был равен 60^0.

Задача 7.3.4. (Задача Наполеона). На сторонах произвольного треугольника как на основаниях вне треугольника построены равносторонние треугольники. Доказать, что центры этих равносторонних треугольников также являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. На рис.10 изображен треугольник ABC, на сторонах которого построены равносторонние треугольники AC_1B, BA_1C и ACB_1. Точки C_2, A_2 и B_2 – центры этих треугольников соответственно.

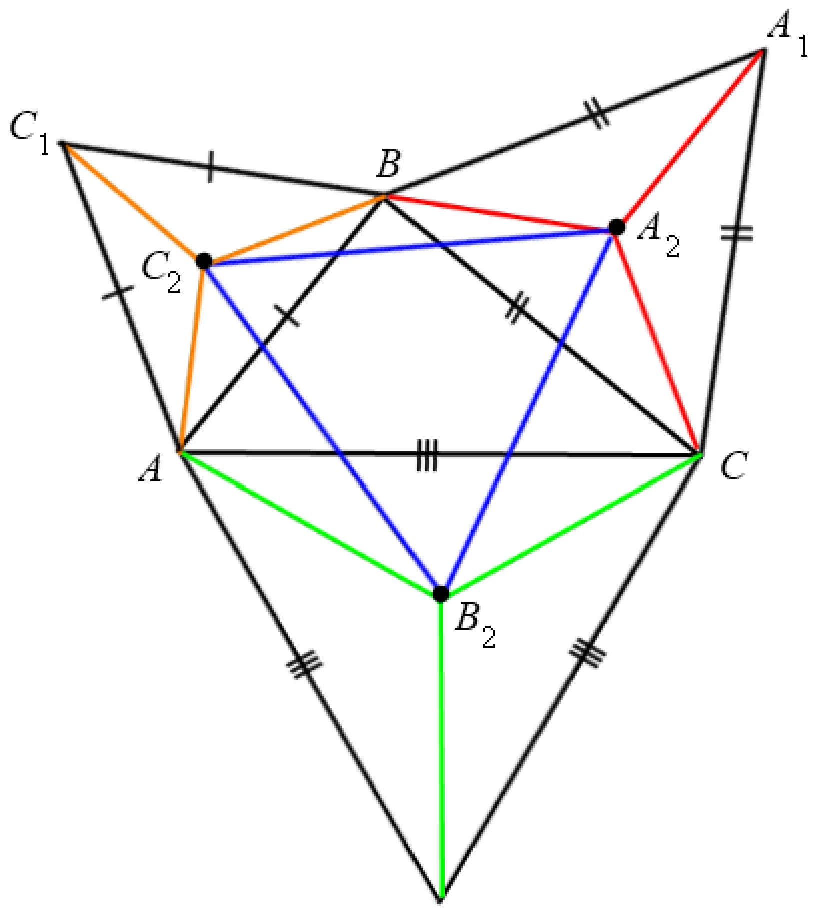

Рис. 10

Убирая с рис. 10 четырехугольники AC_1BC_2, BA_1CA_2 и AB_2CB_1, которые затрудняют понимание решения, получаем рис. 11.

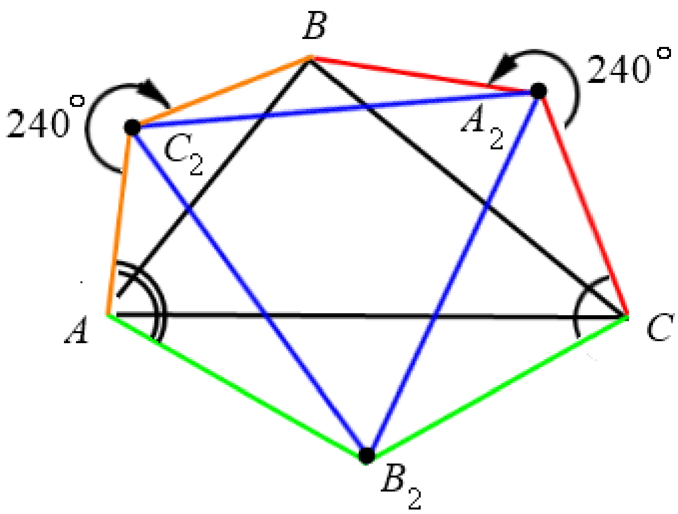

Рис. 11

Угол BA_2C равен 120^0 как угол между биссектрисами равностороннего треугольника. Поэтому при повороте треугольника A_2CB_2 на угол 240^0 вокруг точки A_2 **против хода часов** точка C переходит в точку B, а точка B_2 переходит в точку B_3 (рис.12).

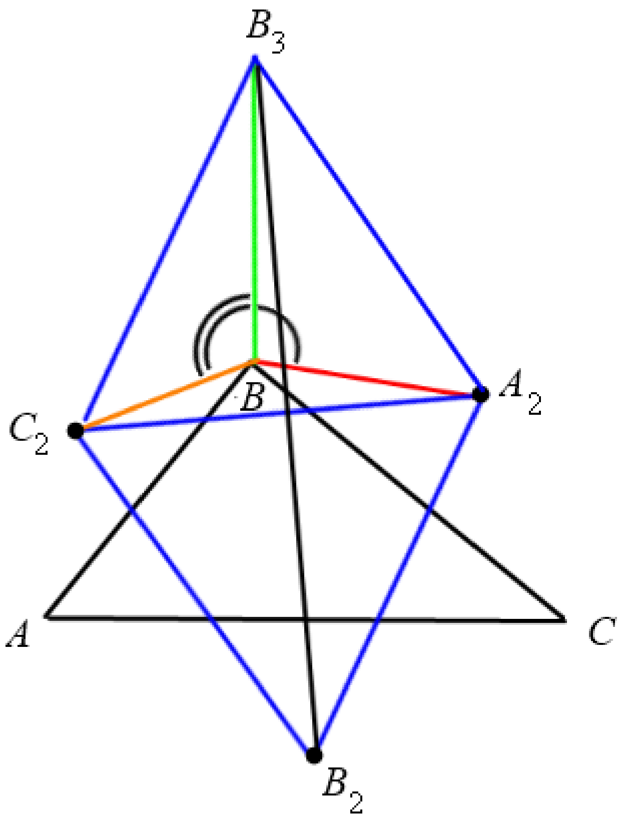

Рис 12

Угол AC_2B тоже равен 120^0 как угол между биссектрисами равностороннего треугольника. Поэтому при повороте треугольника AC_2B_2 на угол 240^0 вокруг точки C_2 **по ходу часов** точка A переходит в точку B.

Докажем, что при повороте треугольника AC_2B_2 вокруг точки C_2 точка B_2, так же, как и в случае поворота треугольника A_2CB_2 вокруг точки A_2, **переходит в точку B_3** (рис.12). Действительно,

$$\angle A_2BB_3 = \angle A_2CB_2 = \angle ACB + \angle ACB_2 + \angle BCA_2 = \angle ACB + 30^0 + 30^0 = \angle ACB + 60^0$$

Кроме того

$$\angle C_2BB_3 = \angle C_2AB_2 = \angle BAC + \angle BAC_2 + \angle CAB_2 = \angle BAC + 30^0 + 30^0 = \angle BAC + 60^0$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\angle C_2BA_2 + \angle C_2BB_3 + \angle A_2BB_3 = \angle C_2BA_2 + \angle ACB + 60^0 + \angle BAC + 60^0 = \\ &= \angle ABC + \angle C_2BA + \angle A_2BC + \angle ACB + \angle BAC + 120^0 = \\ &= \angle ABC + 30^0 + 30^0 + \angle ACB + \angle BAC + 120^0 = 360^0,\end{aligned}$$

Таким образом, при поворотах треугольников A_2CB_2 и AC_2B_2 отрезки B_2C и B_2A переходят в один и тот же отрезок BB_3, что и требовалось.

Далее получаем:

$$\begin{aligned}&\angle B_2A_2B_3 = \angle B_2A_2B + \angle BA_2B_3 = \angle B_2A_2B + \angle B_2A_2C = 120^0, \\ &\angle B_2C_2B_3 = \angle B_2C_2B + \angle BC_2B_3 = \angle B_2C_2B + \angle B_2C_2A = 120^0.\end{aligned}$$

Так как $A_2B_2 = A_2B_3$, то треугольник $B_2A_2B_3$ – равнобедренный, причем

$$\angle B_2A_2B_3 = 120^0, \quad \angle B_2B_3A_2 = \angle B_3B_2A_2 = 30^0.$$

Заметим, что и треугольник $B_2C_2B_3$ – равнобедренный, причем

$$B_2C_2 = C_2B_3, \quad \angle B_2C_2B_3 = 120^0, \quad \angle B_2B_3C_2 = \angle B_3B_2C_2 = 30^0.$$

У равнобедренных треугольников $B_2A_2B_3$ и $B_2C_2B_3$ общее основание B_2B_3, а углы при основании равны 30^0. Следовательно, треугольники $B_2A_2B_3$ и $B_2A_2B_3$ равны, а четырехугольник $A_2B_2C_2B_3$ – ромб, у которого угол $B_2A_2B_3$ равен 120^0. Отсюда вытекает, что угол $A_2B_2C_2$ равен 60^0, и треугольник $A_2B_2C_2$ – равносторонний, что и завершает решение задачи Наполеона.

Задача 7.4.1. **(Задача Герона Александрийского)**. Города A и B расположены на одном берегу реки MN. Курьер должен доставить донесение из города A в город B, напоив в реке коня. По какому пути нужно двигаться курьеру, чтобы пройденное им расстояние было наименьшим?

Решение. Рассмотрим какой-нибудь путь курьера из города A в город B с заездом к реке в точке C, и обозначим A_1 точку, симметричную точке A относительно прямой MN (рис.13а).

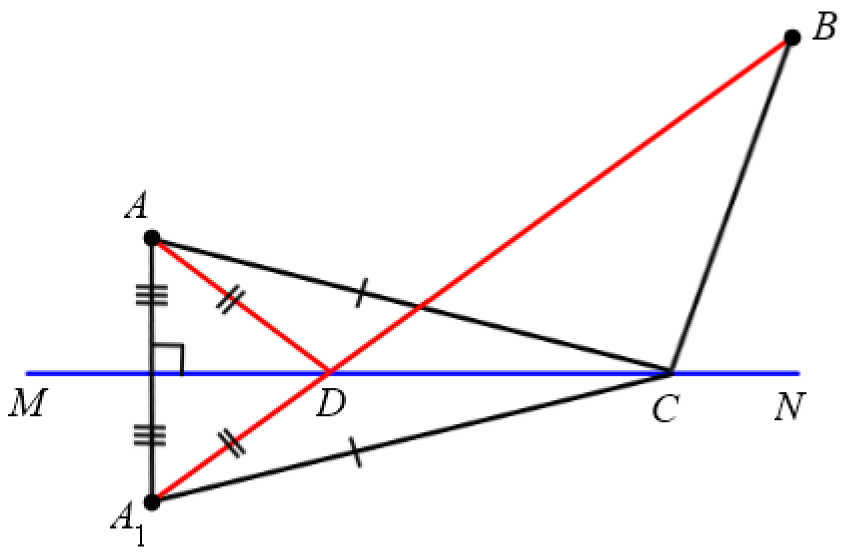

Рис.13а

Поскольку отрезки AC и A_1C равны, то длина пути $A \to C \to B$ равна длине пути $A_1 \to C \to B$. Но самым коротким путем, ведущим из точки A_1 в точку B, является отрезок A_1B, пересекающий прямую MN в точке D. Таким образом, самый короткий путь для курьера – это путь $A \to D \to B$.

Замечание 1. Задачу Герона Александрийского можно переформулировать в виде задачи о траектории бильярдного шара, которая состоит в следующем.

Бильярдная формулировка задачи Герона Александрийского. На бильярдном столе с краем MN лежат шары A и B. Как игрок должен направить шар A, чтобы, отразившись от края MN, шар A попал в шар B?

Решение. Проведем через точки D и C перпендикуляры DE и CF к краю стола MN соответственно (рис.13б).

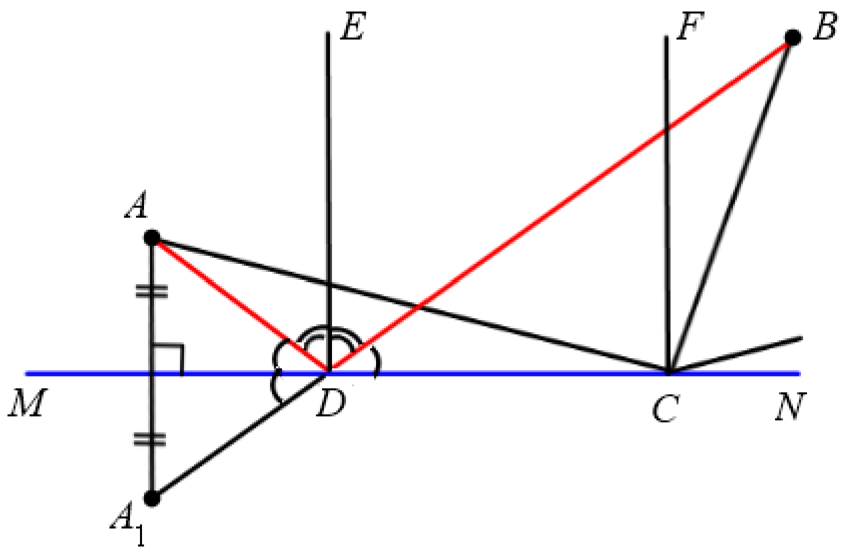

Рис 13б

Если игрок направит шар *A* в точку *D*, то, в соответствии с физическим законом отражения, который утверждает, что в точке падения (точка *D*) угол падения *ADE* равен углу отражения *EDB*, шар после отражения от края *MN* будет двигаться по отрезку *DB* и ударится в шар *B*. Если же игрок направит шар *A* в произвольную точку *C*, отличную от точки *D*, то угол *ACF* уже не будет равняться углу *FCB*, и шар *A* не попадет в шар *B*. Путь шара *A*, попадающего после отражения от края бильярдного стола в шар *B*, отмечен на рис. 13б красным цветом.

Замечание 2. Если игрок направит шар *B* в точку *D*, то, отразившись от края стола *MN* в точке *D*, шар попадет в шар *A*. Таким образом, шар пройдет путь $A \to D \to B$ в обратном направлении.

Замечание 3. Любую задачу, которая решается с помощью осевой симметрии, можно переформулировать в виде задачи о траектории бильярдного шара.

Задача 7.4.2. (Построение треугольника наименьшего периметра с двумя вершинами на сторонах угла). Дан острый угол *ABC* и точка *D* внутри него. На сторонах угла найти точки *E* и *F* так, чтобы периметр треугольника *DEF* был наименьшим.

Решение. Рассмотрим острый угол ABC и произвольный треугольник DNM, вершины N и M которого лежат на сторонах угла AB и BC соответственно (рис. 14).

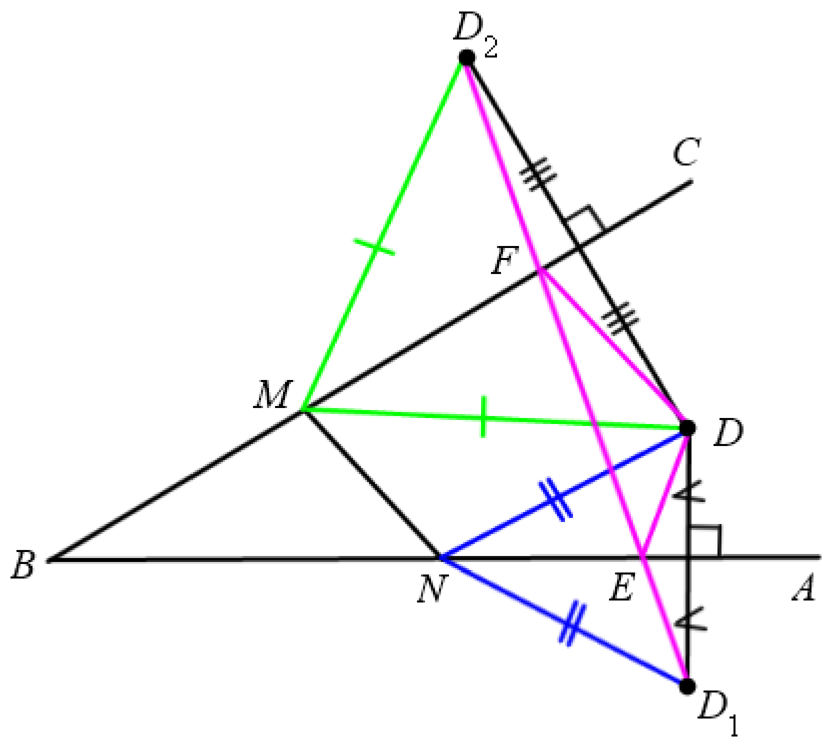

Рис.14

Если обозначить D_1 и D_2 точки, симметричные точке D относительно прямых AB и BC соответственно, то будут справедливы равенства: $DN = D_1N$, $DM = D_2M$. Из этих равенств вытекает, что периметр треугольника DNM равен длине ломаной линии $D_1 \to N \to M \to D_2$. Но самой короткой линией, соединяющей точки D_1 и D_2, является отрезок D_1D_2, пересекающий стороны угла AB и BC в точках E и F соответственно. Полученный треугольник DEF и обладает наименьшим периметром.

Замечание **(Бильярдный аналог задачи о треугольнике наименьшего периметра с двумя вершинами на сторонах угла).** Рассмотрим лучи AB и BC как края бильярдного стола ABC без луз, на котором лежит шар D. Если игрок направит шар D в точку F, то, отразившись, в соответствии с физическим законом отражения, от края BC в точке F, шар, пройдя по отрезку FE, отразится от края AB в точке E и вернется в точку D по отрезку ED. Если же игрок направит шар D в точку E, то шар вернется в точку D, пройдя путь DEF в обратном направлении.

Задача 7.4.3. **(Задача Фаньяно)**. На сторонах остроугольного треугольника ABC найти такие точки A_1, B_1 и C_1, чтобы периметр треугольника $A_1B_1C_1$ был наименьшим.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC и произвольную точку D, лежащую, например, на стороне AC. Построим треугольник DEF, обладающий наименьшим периметром среди всех треугольников, одна из вершин которых совпадает с точкой D, а две другие вершины E и F лежат на сторонах AB и BC соответственно. С этой целью отразим точку D симметрично относительно прямых AB и BC и обозначим полученные точки D_1 и D_2 соответственно (рис.15).

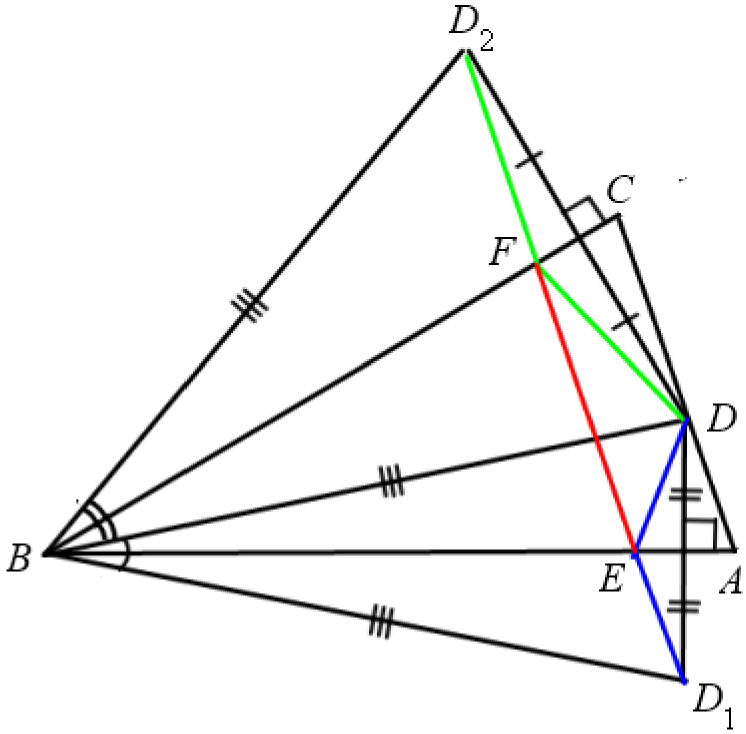

Рис.15

Как мы только что видели в задаче 7.4.2, точки E и F, в которых отрезок D_1D_2 пересекает стороны треугольника AB и BC, являются вершинами искомого треугольника DEF, причем периметр треугольника DEF длине отрезка D_1D_2.

Определим теперь, в каком месте на стороне AC должна лежать точка D, чтобы длина отрезка D_1D_2 была наименьшей. Для этого заметим, что где бы ни лежала на стороне AC точка D, треугольник D_1BD_2 всегда будет равнобедренным, причем угол D_1BD_2 всегда будет в 2 раза большим, чем угол ABC. Действительно, если $\angle ABC = \beta$, то

$$\angle D_1BD_2 = \angle D_1BD + \angle DBD_2 = 2 \cdot \angle ABD + 2 \cdot \angle DBC = 2 \cdot (\angle ABD + \angle DBC) = 2\beta$$

Поскольку $D_1B = BD_2 = BD$, то в равнобедренном треугольнике D_1BD_2 с углом при вершине 2β основание D_1D_2 будет наименьшим тогда и только тогда, когда боковые стороны D_1B и BD_2 будут наименьшими (рис.16),

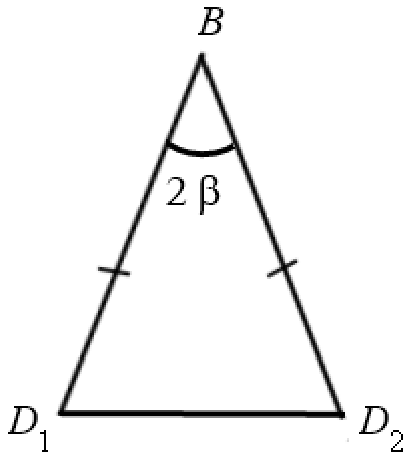

Рис.16

а произойдет это в том, и только в том случае, когда равный им отрезок BD будет наименьшим. Но наименьшим отрезком, соединяющим точку B с точками отрезка AC, является перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую AC. Итак, мы доказали, что среди всех треугольников DEF с вершиной D, лежащей на стороне AC, существует единственный треугольник, обладающий наименьшим периметром, а, именно, треугольник, у которого точка D является основанием высоты, проведенной из вершины B треугольника ABC на сторону AC.

Поскольку сторону AC и точку D на ней мы выбрали совершенно произвольно, то мы получаем, что единственным треугольником, обладающим наименьшим периметром среди всех треугольников, вписанных в треугольник

ABC, является треугольник $A_1B_1C_1$, вершины A_1 , B_1 ,C_1, которого являются основаниями высот AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC (рис.17).

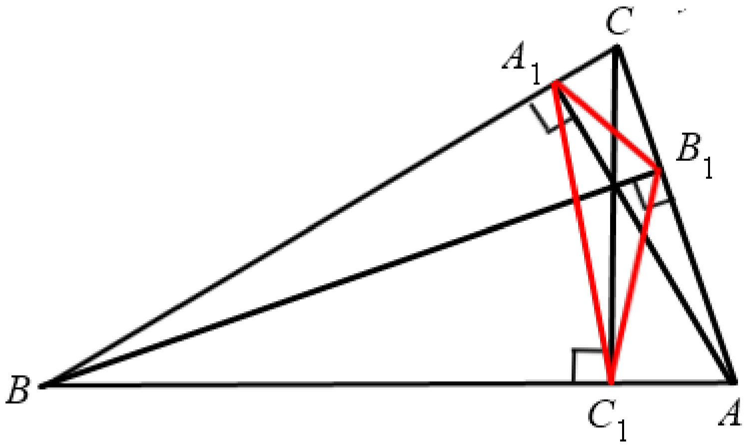

Рис.17

Решение задачи Фаньяно завершено.

Замечание 1. Треугольник, образованный основаниями высот треугольника, называют ортотреугольником (ортоцентрическим треугольником).

Замечание 2. (Бильярдный аналог задачи Фаньяно). Рассмотрим треугольник ABC как бильярдный стол без луз. Если игрок пошлет, например, шар из точки A_1 в точку B_1, то, отразившись от края стола AC в точке B_1, шар попадет в точку C_1. После этого шар, отразившись от края стола AB в точке C_1, возвратится в точку A_1. Траекторией шара будет ортотреугольник $A_1B_1C_1$, отмеченный на рис.17 красным цветом. Если же игрок направит шар из точки A_1 в точку C_1, то шар вернется в точку A_1, пройдя путь $A_1B_1C_1$ в обратном направлении.

Задача 7.4.4. (Задача о нахождении бильярдной траектории). На бильярдном столе в форме прямоугольника $ABCD$ без луз лежат шары M и N. Игрок бьет кием по шару M. После этого шар M ударяется в сторону AB, затем в сторону BC, потом в сторону CD и попадает в шар N. Найти путь шара M.

Решение. Введем следующие обозначения: точка M_1 – это точка, симметричная точке M относительно прямой AB; точка M_2 – это точка, симметричная точке M_1 относительно прямой BC; точка M_3 – это точка, симметричная точке M_2 относительно прямой CD (рис.18).

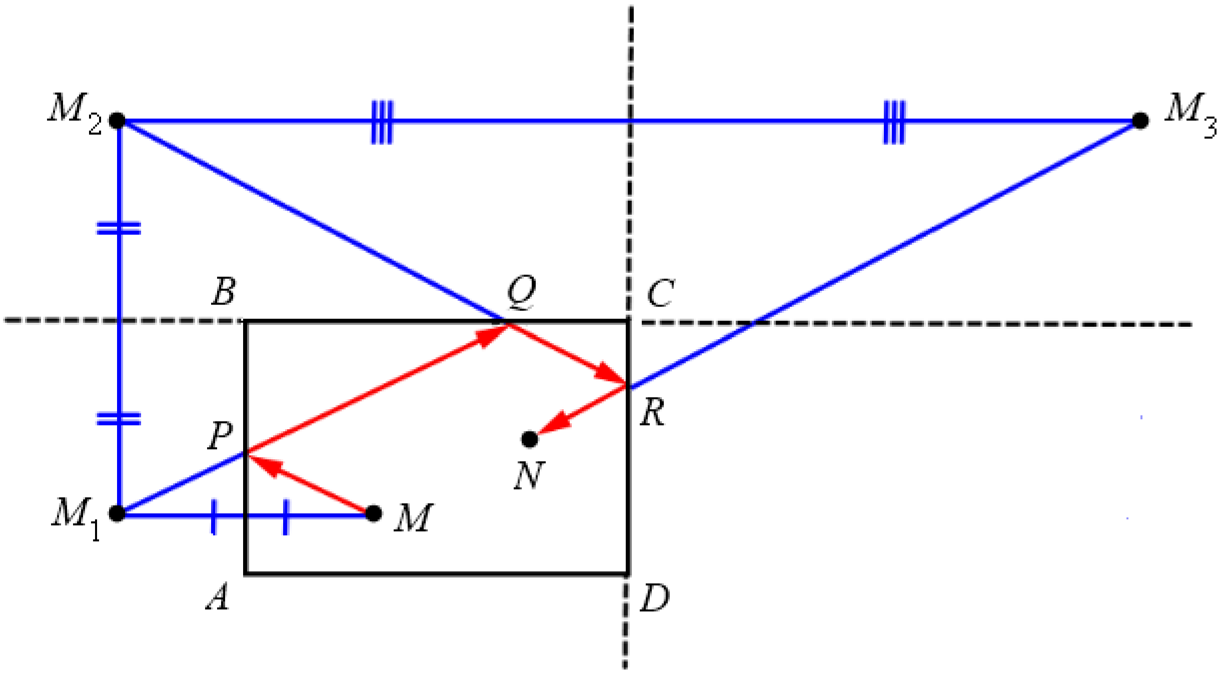

Рис.18

Буквой R обозначим точку пересечения отрезков NM_3 и CD, буквой Q обозначим точку пересечения отрезков RM_2 и BC, буквой P обозначим точку пересечения отрезков QM_1 и AB. По свойству осевой симметрии (угол падения равен углу отражения) шар M, посланный игроком в точку P, отразившись от борта AB, попадет в точку Q, затем, отразившись от борта BC, попадет в точку R и, наконец, отразившись от борта CD, ударится в шар N. Путь шара отмечен на рис.18 красным цветом.

Задача 7.5.1. (Задача о двух ромбах). У ромбов $ABCD$ и $MNPK$ вершины A и M совпадают, а углы при вершинах A и M равны. При обходе по направлению $A \to B \to C \to D$ ромб $ABCD$ остается справа, так же и при обходе по направлению $M \to N \to P \to K$ ромб $MNPK$ остается справа. Доказать, что отрезки BN и DK равны, а угол между ними равен углу BAD.

Решение. В результате поворота плоскости вокруг точки A по ходу часов на угол BAD точка B переходит в точку D, а точка N переходит в точку K. Поэтому отрезок BN переходит в отрезок DK (рис.19).

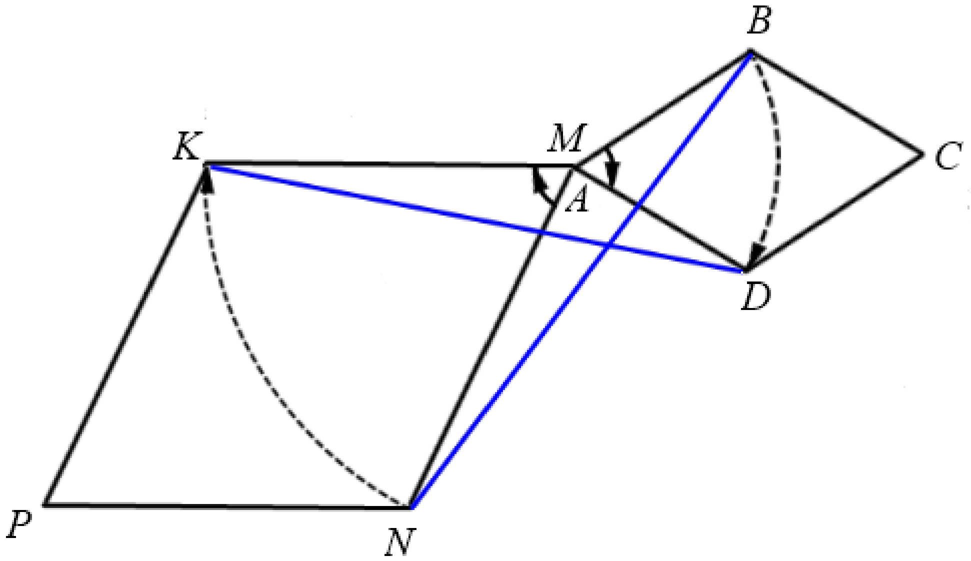

Рис.19

Поскольку поворот плоскости сохраняет расстояние между точками, а каждая прямая поворачивается на угол, равный углу поворота, то отрезки *BN* и *DK* равны, а угол между ними равен углу *BAD*.

Задача 7.6.1. **(Задача о замкнутой бильярдной траектории)**. Бильярдный стол без луз имеет форму квадрата *ACDF*, на сторонах *AC* и *FD* которого как на диаметрах вне квадрата построены полукруги (рис.20). Найти какую-нибудь замкнутую траекторию движения бильярдного шара, имеющую 6 звеньев.

Решение. Если, например, послать шар из точки *A* в точку *D*, то траекторией шара будет замкнутая ломаная линия, отмеченная на рис.20 красным цветом и состоящая из 6 звеньев: $AD \to DE \to EF \to FC \to CB \to BA$.

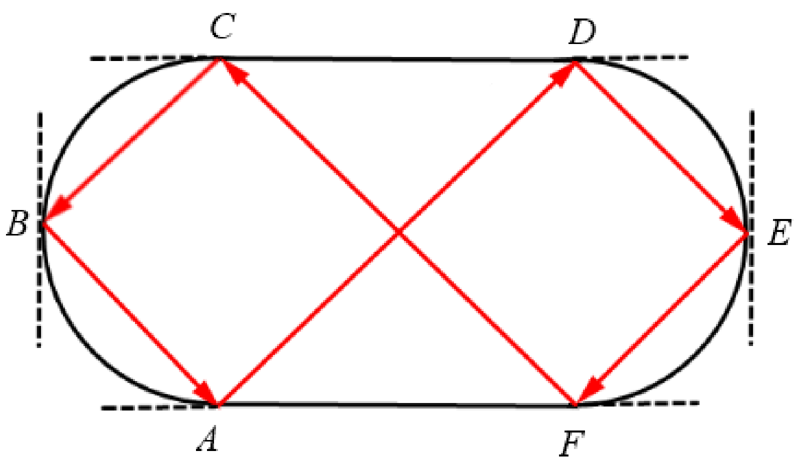

Рис.20

В точках B и E траектория шара будет образовывать равные углы падения и отражения с касательными, проведенными к окружностям, а в точках A, C, D и F − равные углы падения и отражения с прямыми AF и CD. Если послать шар из точки D в точку A, то шар пройдет по той же замкнутой ломаной линии, но в противоположном направлении.