Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

ПРОГРЕССИИ

Учебно-методическое пособие для школьников

Определение 1. Рассмотрим два произвольных числа a и d. Числовую последовательность

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$$

заданную формулами

$$a_1 = a,\ a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d, ...,\ a_{n+1} = a_n + d, ..., \quad (1)$$

называют **арифметической прогрессией**, а число d называют **разностью** данной арифметической прогрессии.

В случае $d > 0$ арифметическую прогрессию называют **возрастающей**.

В случае $d < 0$ арифметическую прогрессию называют **убывающей.**

В случае $d = 0$ все члены арифметической прогрессии равны числу a, и арифметическую прогрессию называют **стационарной.**

Пример 1. Числовая последовательность

$$2, 5, 8, ..., a_n, ...,$$

заданная соотношениями

$$a_1 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + 3, \quad n = 2, 3, ...,$$

является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 2$, $d = 3$.

Пример 2. Числовая последовательность задана формулой

$$a_n = 3 + 5n,\ n = 1, 2, 3, ...$$

Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

Решение. Поскольку

$$a_{n+1} = 3 + 5(n+1) = 3 + 5n + 5 = a_n + 5,$$

то при всех значениях $n = 1, 2, 3, ...$ для данной последовательности выполнены соотношения (1), и она является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 8$, $d = 5$.

Ответ: данная последовательность является арифметической прогрессией.

Определение 2. Рассмотрим два произвольных числа b и q, удовлетворяющих условиям:

$$b \neq 0, \; q \neq 0, \; q \neq 1.$$

Числовую последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$$

заданную формулами

$$b_1 = b, \; b_2 = b_1 q, \; b_3 = b_2 q, \ldots, \; b_{n+1} = b_n q, \ldots, \qquad (2)$$

называют **геометрической прогрессией**, а число q называют **знаменателем** данной геометрической прогрессии.

В случае $q > 0$ все члены геометрической прогрессии имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком числа b.

В случае $q < 0$ знаки членов геометрической прогрессии чередуются**.**

В случае $-1 < q < 1$ геометрическую прогрессию называют **бесконечно убывающей геометрической прогрессией.**

Пример 3. Числовая последовательность

$$2, \; 6, \; 18, \ldots, b_n, \ldots,$$

заданная соотношениями

$$b_1 = 2, \quad b_n = b_{n-1} \cdot 3, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 2$, $q = 3$.

Пример 4. Числовая последовательность задана формулой

$$b_n = 3 \cdot 5^n, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Является ли эта последовательность геометрической прогрессией?

Решение. Поскольку

$$b_{n+1} = 3 \cdot 5^{n+1} = 3 \cdot 5^n \cdot 5 = b_n \cdot 5,$$

то при всех значениях $n = 1, 2, 3, \ldots$ для данной последовательности выполнены соотношения (2), и она является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 15$, $q = 5$.

Ответ: данная последовательность является геометрической прогрессией.

Для арифметической прогрессии с разностью d справедливы соотношения

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + (2-1)d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d = a_1 + (3-1)d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d = a_1 + (4-1)d,$$
$$\ldots$$

Таким образом, при всех значениях $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено равенство:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad (3)$$

которое называют **формулой для общего члена арифметической прогрессии**.

Для геометрической прогрессии со знаменателем q справедливы соотношения

$$b_2 = b_1 q = b_1 q^1 = b_1 q^{2-1},$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2 = b_1 q^{3-1},$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 = b_1 q^{4-1},$$
$$\ldots$$

Таким образом, при всех значениях $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено равенство:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (4)$$

которое называют **формулой для общего члена геометрической прогрессии**.

Рассмотрим теперь **три любых последовательных члена арифметической прогрессии:**

$$a_{n-1}, \quad a_n, \quad a_{n+1}.$$

Поскольку

$$a_n = a_{n-1} + d; \quad a_n = a_{n+1} - d,$$
$$2a_n = a_{n-1} + d + a_{n+1} - d = a_{n-1} + a_{n+1},$$

то справедливо равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \tag{5}$$

которое называют **характеристическим свойством арифметической прогрессии**.

Рассмотрим **три любых последовательных члена геометрической прогрессии:**

$$b_{n-1}, \quad b_n, \quad b_{n+1}.$$

Поскольку

$$b_n = b_{n-1}q; \quad b_n = \frac{b_{n+1}}{q},$$

$$b_n^{\ 2} = b_{n-1}q \cdot \frac{b_{n+1}}{q} = b_{n-1} \cdot b_{n+1},$$

то справедливо равенство

$$b_n^{\ 2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \tag{6}$$

которое называют **характеристическим свойством геометрической прогрессии**.

Если **для суммы *n* первых членов арифметической прогрессии** ввести обозначение

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

то будут справедливы следующие формулы:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \tag{7}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \tag{8}$$

Действительно, из формулы (3) вытекают соотношения:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d,$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d,$$
$$\dots$$
$$a_{n-1} + a_2 = a_1 + (n-2)d + a_1 + d = 2a_1 + (n-1)d,$$
$$a_n + a_1 = a_1 + (n-1)d + a_1 = 2a_1 + (n-1)d.$$

Поэтому

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}\left[\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) + \left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(a_1 + a_n\right) + \left(a_2 + a_{n-1}\right) + \ldots + \left(a_n + a_1\right)\right] =$$
$$= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

что и требовалось доказать.

Если **для суммы *n* первых членов геометрической прогрессии** ввести обозначение

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

то будет справедлива формула:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad (9)$$

Действительно, из формулы (4) получаем:

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}). \qquad (10)$$

Поэтому

$$S_n = b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}),$$
$$qS_n = qb_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = b_1(q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n),$$
$$qS_n - S_n = b_1(q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n) - b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) =$$
$$= b_1 \cdot q^n - b_1 \cdot 1 = b_1(q^n - 1).$$

Следовательно,

$$qS_n - S_n = (q-1)S_n = b_1(q^n - 1),$$
$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из формул (9) и (10) вытекает соотношение:

$$q^n - 1 = (q-1)\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1\right), \qquad (11)$$

следствием которого является **формула для разложения двучлена** $x^n - y^n$ **на множители:**

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right). \qquad (12)$$

Например,

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2),$$
$$x^7 - b^7 = (x-y)(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6).$$

Для доказательства формулы (12) совершим в формуле (11) подстановку:

$$q = \frac{x}{y}.$$

В результате формула (12) примет вид:

$$\frac{x^n}{y^n} - 1 = \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{y^{n-2}} + \ldots + \frac{x}{y} + 1\right),$$

откуда, при помощи умножения на y^n, и получается формула (12).

Из формулы (12) вытекает **формула для разложения двучлена $x^{2m+1} + y^{2m+1}$ на множители (m — натуральное число):**

$$x^{2m+1} + z^{2m+1} = (x+z)\left(x^{2m} - x^{2m-1}z + x^{2m-2}z^2 - \ldots - xz^{2m-1} + z^{2m}\right). \quad (13)$$

Например,

$$x^3 + z^3 = (x+z)(x^2 - xz + z^2),$$
$$x^7 + z^7 = (x+z)(x^6 - x^5z + x^4z^2 - x^3z^3 + x^2z^4 - xz^5 + z^6).$$

Для доказательства формулы (13) достаточно в случае $n = 2m+1$ совершить в формуле (12) подстановку

$$y = -z.$$

Пример 5. Пятый член арифметической прогрессии равен 3. Найти сумму первых девяти членов прогрессии.

Решение. Воспользовавшись формулами (8) и (3), получаем:

$$S_9 = \frac{2a_1 + (9-1)d}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d) \cdot 9 = a_5 \cdot 9 = 3 \cdot 9 = 27.$$

Ответ: 27.

Пример 6. Сумма первого и второго членов арифметической прогрессии равна седьмому члену, а пятый член этой прогрессии равен 18. Найти первый член этой прогрессии.

Решение. Условие задачи можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a_7, \\ a_5 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + d = a_1 + 6d, \\ a_1 + 4d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5d, \\ a_1 + 4d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5d, \\ 9d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5d, \\ d = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10, \\ d = 2. \end{cases}$$

Ответ: $a_1 = 10$.

Пример 7. Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен разности между четвертым и вторым членами. Найти первый член прогрессии.

Решение. Условие задачи можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a_4 - a_2 = a_7, \\ a_7 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 3d - a_1 - d = a_1 + 6d, \\ a_1 + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4d, \\ a_1 + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4d, \\ 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4d, \\ d = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2, \\ d = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $a_1 = -2$.

Пример 8. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 351, а сумма следующих трех членов равна 13. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение. Условие задачи можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=351, \\ b_4+b_5+b_6=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=351, \\ b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=351, \\ b_1(1+q+q^2)q^3=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=351, \\ 351q^3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=351, \\ q=\sqrt[3]{\dfrac{13}{351}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9})=351, \\ q=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{9}b_1=351, \\ q=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=\dfrac{351\cdot 9}{13}=243, \\ q=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $b_1=243,\ q=\dfrac{1}{3}.$.

Пример 9. Три числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Если из первого числа этой прогрессии вычесть 4, то полученные числа в том же порядке составят арифметическую прогрессию, сумма членов которой равна 9. Найти первый член полученной арифметической прогрессии.

Решение. Поскольку числа $b_1,\ b_2,\ b_3$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию, то справедливо равенство:

$$b_2{}^2=b_1b_3 .$$

Поскольку числа $b_1-4,\ b_2,\ b_3$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию, то справедливо равенство:

$$b_2=\frac{b_1-4+b_3}{2}.$$

Поскольку сумма чисел $b_1-4,\ b_2,\ b_3$ равна 9, то справедливо равенство:

$$b_1-4+b_2+b_3=9 .$$

Таким образом, возникает система уравнений:

$$\begin{cases} b_2^{\,2} = b_1 b_3, \\ b_2 = \dfrac{b_1 - 4 + b_3}{2}, \\ b_1 - 4 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ b_1 - 2b_2 + b_3 = 4, \\ b_2^{\,2} = b_1 b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ 3b_2 = 9, \\ b_2^{\,2} = b_1 b_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_3 = 10, \\ b_2 = 3, \\ b_1 b_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_3 = 10, \\ b_2 = 3, \\ b_1(10 - b_1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_3 = 10, \\ b_2 = 3, \\ b_1^2 - 10b_1 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_3 = 10, \\ b_2 = 3, \\ b_1 = 9 \end{cases} \cup \begin{cases} b_1 + b_3 = 10, \\ b_2 = 3, \\ b_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 9, \\ b_2 = 3, \\ b_3 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} b_1 = 1, \\ b_2 = 3, \\ b_3 = 9. \end{cases}$$

Поскольку числа $b_1,\ b_2,\ b_3$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию, то $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 9$. Следовательно, первый член арифметической прогрессии $b_1 - 4,\ b_2,\ b_3$ равен -3.

Ответ: -3.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 30. Найти третий член прогрессии.
2. Сумма второго и восьмого членов арифметической прогрессии равна десятому члену, а пятый член этой прогрессии равен – 20. Найти первый член этой прогрессии.
3. Шестой член арифметической прогрессии равен 2,5 и равен четвертому члену, умноженному на 5. Найти первый член прогрессии.
4. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, а сумма следующих трех членов равна 1053. Найти первый член и знаменатель прогрессии.
5. Три числа составляют убывающую арифметическую прогрессию. Если к первому члену этой прогрессии прибавить 4, то полученные числа в

том же порядке составят геометрическую прогрессию, произведение членов которой равно 27. Найти первый член арифметической прогрессии.