

**Кандидат физико-математических наук, доцент**

**С. С. САМАРОВА**

## **МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ**

**Учебно-методическое пособие для школьников по математике**

**© С. С. Самарова, 2010**

**Пример 1.** Составить уравнение прямой, параллельной прямой  $y = 2x + 3$  и проходящей через точку  $(1; 7)$ .

**Решение.** Поскольку уравнения параллельных прямых имеют одинаковые угловые коэффициенты, то уравнение каждой прямой, параллельной прямой  $y = 2x + 3$ , может быть записано в виде  $y = 2x + d$ , где  $d$  — некоторое число. Так как параллельная прямая проходит через точку  $(1; 7)$ , то справедливо равенство  $7 = 2 \cdot 1 + d$ , из которого вытекает, что  $d = 5$ .

**Ответ.**  $y = 2x + 5$

**Пример 2.** Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой  $y = \frac{1}{2}x - 1$  и проходящей через точку  $(3; -5)$ .

**Решение.** Поскольку любая прямая, перпендикулярная к прямой  $y = kx + b$ , имеет угловой коэффициент, равный  $-\frac{1}{k}$ , то уравнение каждой прямой, перпендикулярной к прямой  $y = \frac{1}{2}x - 1$ , может быть записано в виде  $y = -2x + d$ , где  $d$  — некоторое число. Так как перпендикулярная прямая проходит через точку  $(3; -5)$ , то справедливо равенство  $-5 = -2 \cdot 3 + d$ , из которого вытекает, что  $d = 1$ .

**Ответ.**  $y = -2x + 1$

**Пример 3.** Найти координаты точки, лежащей на прямой  $y = x$  и одинаково удаленной от точек  $(3; 1)$  и  $(-2; 4)$ .

**Решение.** Координаты точки, лежащей на прямой  $y = x$  и одинаково удаленной от точек  $(3; 1)$  и  $(-2; 4)$ , удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = x, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ -10x + 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ -4x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

**Пример 4.** Найти координаты точек, лежащих на прямой  $y = 2x + 2$  и удаленных от точки  $(-6; 5)$  на расстояние  $5\sqrt{5}$ .

**Решение.** Искомые координаты точек удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2x + 2, \\ \sqrt{(x+6)^2 + (y-5)^2} = 5\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2, \\ (x+6)^2 + (y-5)^2 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2, \\ (x+6)^2 + (2x-3)^2 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2, \\ x^2 + 12x + 36 + 4x^2 - 12x + 9 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2, \\ 5x^2 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2, \\ x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2, \\ x = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 2x + 2, \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

**Ответ.**  $(4; 10), (-4; -6)$

**Пример 5.** Найти координаты точек, лежащих на параболе  $y = x^2 - 4x + 6$  и удаленных от прямой  $y = -4$  на расстояние 7.

**Решение.** Искомые координаты точек удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ |y + 4| = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y + 4 = 7 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y + 4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = -11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 6 = 3 \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 4x + 6 = -11 \\ y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 4x + 17 = 0 \\ y = -11 \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку уравнение  $x^2 - 4x + 17 = 0$  корней не имеет, а корнями уравнения  $x^2 - 4x + 3 = 0$  являются числа  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , то искомые точки имеют координаты  $(1; 3)$  и  $(3; 3)$

**Ответ.**  $(1; 3)$ ,  $(3; 3)$ .

**Пример 6.** Составить уравнения касательных к параболе  $y = x^2 - 3x + 4$ , проходящих через точку  $(0; 3)$ .

**Решение.** Во-первых, если прямая, заданная уравнением  $y = kx + b$ , проходит через точку  $(0; 3)$ , то выполняется равенство  $3 = k \cdot 0 + b$  и уравнение прямой принимает вид  $y = kx + 3$ . Во-вторых, если прямая, заданная уравнением  $y = kx + 3$ , является касательной к параболе  $y = x^2 - 3x + 4$ , то уравнение

$$kx + 3 = x^2 - 3x + 4,$$

эквивалентное уравнению

$$x^2 - (3 + k)x + 1 = 0,$$

имеет два совпавших корня и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Выписывая дискриминант квадратного трехчлена, получаем:

$$D = (3 + k)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (3 + k - 2)(3 + k + 2) = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1, k_2 = -5.$$

**Ответ.**  $y = -x + 3$ ,  $y = -5x + 3$

**Пример 7.** Составить уравнение касательной к параболе  $y = x^2 - 7x + 3$ , параллельной прямой  $y = 3 - 5x$ .

**Решение.** Во-первых, если прямая, заданная уравнением  $y = kx + b$ , параллельна прямой  $y = 3 - 5x$ , то её уравнение имеет вид  $y = -5x + b$ , где  $b$  – любое число. Во-вторых, если прямая, заданная уравнением  $y = -5x + b$ , является касательной к параболе  $y = x^2 - 7x + 3$ , то уравнение

$$-5x + b = x^2 - 7x + 3,$$

эквивалентное уравнению

$$x^2 - 2x + 3 - b = 0,$$

имеет два совпавших корня и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Выписывая дискриминант квадратного трехчлена, получаем:

$$D = 4 - 4(3 - b) = 0 \Leftrightarrow 4 - 12 + 4b = 0 \Leftrightarrow 4b = 8 \Leftrightarrow b = 2.$$

**Ответ.**  $y = -5x + 2$ .

**Пример 8.** Составить уравнение касательной к параболе  $y = x^2 - 2x$ , перпендикулярной прямой  $y = x + 5$ .

**Решение.** Во-первых, если прямая, заданная уравнением  $y = kx + b$ , перпендикулярна прямой  $y = x + 5$ , то её уравнение имеет вид  $y = -x + b$ , где  $b$  – любое число. Во-вторых, если прямая, заданная уравнением  $y = -x + b$ , является касательной к параболе  $y = x^2 - 2x$ , то уравнение

$$-x + b = x^2 - 2x,$$

эквивалентное уравнению

$$x^2 - x - b = 0,$$

имеет два совпавших корня и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Выписывая дискриминант квадратного трехчлена, получаем:

$$D = 1 + 4b = 0 \Leftrightarrow 4b = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}.$$

**Ответ.**  $y = -x - \frac{1}{4}$ .

**Пример 9.** Найти расстояние от точки  $(0; -10)$  до вершины параболы

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3.$$

**Решение.** Найдем, сначала, координаты вершины параболы:

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} = -3; y_v = \frac{1}{3} \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = -6.$$

Теперь найдем требуемое расстояние между точками:

$$\sqrt{(0 - (-3))^2 + (-10 - (-6))^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

**Ответ.** 5

**Пример 10.** Найти все значения параметра  $p$ , при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 + 6px + 8p^2 - 1 \text{ и } y = \frac{1}{5}x^2 + 2px + 3p^2$$

больше  $\frac{5}{4}$ .

**Решение.** Найдем, сначала, координаты вершины первой параболы:

$$x_v = -\frac{6p}{2} = -3p; y_v = (-3p)^2 + 6p(-3p) + 8p^2 - 1 = -p^2 - 1.$$

Теперь найдем координаты вершины второй параболы:

$$x_v = -\frac{2p}{2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)} = -5p; y_v = \frac{1}{5} \cdot (-5p)^2 + 2p \cdot (-5p) + 3p^2 = -2p^2.$$

Теперь найдем расстояние между вершинами двух парабол:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-3p - (-5p))^2 + (-p^2 - 1 - (-2p^2))^2} &= \sqrt{4p^2 + (p^2 - 1)^2} = \sqrt{4p^2 + p^4 - 2p^2 + 1} = \\ &= \sqrt{p^4 + 2p^2 + 1} = \sqrt{(p^2 + 1)^2} = |p^2 + 1| = p^2 + 1. \end{aligned}$$

Далее получаем:

$$p^2 + 1 > \frac{5}{4} \Leftrightarrow p^2 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow |p| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow p \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

**Ответ.**  $p \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

**Пример 11.** Найти все значения параметра  $p$ , при которых вершина параболы

$$y = 5x^2 - 6px + \frac{4}{5}p + \frac{14}{5}p^2$$

лежит вне круга радиуса  $\frac{5}{2}$  с центром в точке  $\left(\frac{9}{5}; p^2 - \frac{1}{10}\right)$ .

**Решение.** Найдем, сначала, координаты вершины параболы:

$$x_v = \frac{6p}{10} = \frac{3p}{5}; y_v = 5 \cdot \left(\frac{3p}{5}\right)^2 - 6p \cdot \left(\frac{3p}{5}\right) + \frac{4}{5}p + \frac{14}{5}p^2 = p^2 + \frac{4}{5}p.$$

Теперь найдем расстояние от вершины параболы до центра круга:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{3p}{5} - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(p^2 - \frac{1}{10} - \left(p^2 + \frac{4}{5}p\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}(p-3)^2 + \left(\frac{4}{5}p + \frac{1}{10}\right)^2} = \\ & = \sqrt{\frac{36}{100}(p-3)^2 + \frac{1}{100}(8p+1)^2} = \frac{1}{10} \sqrt{36(p-3)^2 + (8p+1)^2} = \\ & = \frac{1}{10} \sqrt{36(p^2 - 6p + 9) + 64p^2 + 16p + 1} = \frac{1}{10} \sqrt{100p^2 - 200p + 325} \end{aligned}$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \sqrt{100p^2 - 200p + 325} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{100p^2 - 200p + 325} > 25 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 100p^2 - 200p + 325 > 625 \Leftrightarrow 100p^2 - 200p - 300 > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 > 0 \Leftrightarrow (p-3)(p+1) > 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

**Ответ.**  $p \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить уравнение прямой, параллельной прямой  $y = -x + 4$  и проходящей через точку  $(2; -3)$ .
2. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой  $y = -\frac{1}{3}x + 5$  и проходящей через точку  $(-1; -1)$ .
3. Найти координаты точки, лежащей на прямой  $y = -x$  и одинаково удаленной от точек  $(-1; -2)$  и  $(2; 5)$ .
4. Найти координаты точек, лежащих на прямой  $y = -2x + 5$  и удаленных от точки  $(4; 2)$  на расстояние 5.
5. Найти координаты точек, лежащих на параболе  $y = x^2 + 6x + 10$  и удаленных от прямой  $y = -1$  на расстояние 6.
6. Найти координаты точек, лежащих на параболе  $y = -x^2 + 8x - 13$  и удаленных от прямой  $y = 11$  на расстояние 9.
7. Составить уравнения касательных к параболе  $y = 2x^2 + 6x + 1$ , проходящих через точку  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ .
8. Составить уравнение касательной к параболе  $y = -x^2 + 5$ , перпендикулярной прямой  $y = \frac{1}{3}x$ .
9. Составить уравнения касательных к параболе  $y = x^2 - 2x + 14$ , проходящих через точку  $(0; -2)$ .
10. Составить уравнение касательной к параболе  $y = 4 - x^2$ , параллельной прямой  $y = 4x + 10$ .
11. Составить уравнения касательных к параболе  $y = 3x^2 - 2x + 2$ , проходящих через точку  $(1; 0)$ .



12. Найти расстояние от точки  $(1; -7)$  до вершины параболы

$$y = x^2 + 6x - 1.$$

13. Найти расстояние от точки  $(14; -1)$  до вершины параболы

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4.$$

14. Найти расстояние от точки  $(-3; -11)$  до вершины параболы

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

15. Найти все значения параметра  $p$ , при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 + px - \frac{3}{8}p^2 \text{ и } y = 2x^2 + 3px + 1$$

меньше  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

16. Найти все значения параметра  $p$ , при которых вершина параболы

$$y = px^2 - 2x + 1$$

лежит внутри круга радиуса 2 с центром в точке  $\left(\frac{2}{p}; 1 - 4p\right)$ .

17. Найти все значения параметра  $p$ , при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 + 2px + 4 + p^2 \text{ и } y = x^2 - 6px + 10p^2$$

больше 5.

18. Найти все значения параметра  $p$ , при которых вершина параболы

$$y = 5x^2 + 4px + \frac{4}{5}p^2 + 3$$

лежит вне круга радиуса 4 с центром в точке  $\left(p + 1; -\frac{p}{5}\right)$ .

19. Найти все значения параметра  $p$ , при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 - px + p^2 - 1 \text{ и } y = x^2 - 3px + 2p^2$$

меньше  $\sqrt{13}$ .

20. Найти все значения параметра  $p$ , при которых вершина параболы

$$y = px^2 - 6x + p$$

лежит внутри круга радиуса 1 с центром в точке  $\left(\frac{3}{p} - p; -\frac{8}{p}\right)$ .