

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Учебно-методическое пособие для школьников по математике

© С. С. Самарова, 2010

Начнем с решения простых задач.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x-1)(\log_2 x + 1) > 0.$$

Решение. Напомним, что произведение двух чисел (скобки в левой части неравенства) положительно тогда и только тогда, когда оба этих числа имеют один и тот же знак, и заметим, что областью определения неравенства является множество $x > 0$. Следовательно,

$$(x-1)(\log_2 x + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_2 x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 < 0 \\ \log_2 x + 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_2 x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2 x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x > 1\}$$

Теперь решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1 < 0 \\ \log_2 x + 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \log_2 x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{0 < x < \frac{1}{2}\right\}$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_3(3^x + 1) + x > 2 + \log_3 10.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_3(3^x + 1) + x > 2 + \log_3 10 &\Leftrightarrow \log_3(3^x + 1) + \log_3(3^x) > \log_3 9 + \log_3 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3[3^x \cdot (3^x + 1)] > \log_3 90 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 90 > 0. \end{aligned}$$

Для решения неравенства

$$(3^x)^2 + 3^x - 90 > 0$$

совершим замену переменного

$$3^x = y$$

и найдем корни квадратного уравнения

$$y^2 + y - 90 = 0:$$

$$y^2 + y - 90 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} \Leftrightarrow y_1 = -10, y_2 = 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2 + y - 90 = (y + 10)(y - 9).$$

Следовательно,

$$(3^x)^2 + 3^x - 90 > 0 \Leftrightarrow (3^x + 10)(3^x - 9) > 0 \Leftrightarrow (3^x - 9) > 0 \Leftrightarrow 3^x > 9 \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in (2, +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$1 + 2x < \log_7(1 + 6 \cdot 7^x).$$

Решение.

$$1 + 2x < \log_7(1 + 6 \cdot 7^x) \Leftrightarrow \log_7 7^{2x+1} < \log_7(1 + 6 \cdot 7^x) \Leftrightarrow 7^{2x+1} < 1 + 6 \cdot 7^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7 \cdot 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 1 < 0.$$

Для решения неравенства

$$7 \cdot 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 1 < 0$$

совершим замену переменного

$$7^x = y$$

и найдем корни квадратного уравнения

$$7y^2 - 6y - 1 = 0:$$

$$7y^2 - 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{14} = \frac{6 \pm 8}{14} \Leftrightarrow y_1 = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}, y_2 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 7y^2 - 6y - 1 = 7\left(y + \frac{1}{7}\right)(y - 1).$$

Следовательно,

$$7 \cdot 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 7\left(7^x + \frac{1}{7}\right)(7^x - 1) < 0 \Leftrightarrow (7^x - 1) < 0 \Leftrightarrow 7^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty, 0)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < 0.$$

Решение.

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x < 1 \Leftrightarrow 0 < -\log_3 x < 1 \Leftrightarrow 0 > \log_3 x > -1 \Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_5\left(\frac{3}{x-1}\right) > 0.$$

Решение.

$$\log_5\left(\frac{3}{x-1}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1} < 0.$$

Решая последнее неравенство с помощью метода интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in (1, 4)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x+3}}{\log_2(x^2-3x+3)} \geq 0. \quad (1)$$

Решение. Найдем сначала область определения неравенства.

Во-первых, число, стоящее под знаком квадратного корня, должно быть неотрицательным, т.е. должно выполняться неравенство

$$2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}. \quad (2)$$

Во-вторых, число, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, т.е. должно выполняться неравенство

$$x^2-3x+3 > 0. \quad (3)$$

Для решения неравенства (3) вычислим дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в его левой части:

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Поскольку дискриминант отрицателен, а ветви параболы направлены вверх, то неравенство (3) выполняется при всех значениях x .

В третьих, знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства (1), не должен обращаться в нуль, т.е. должно выполняться неравенство

$$x^2-3x+3 \neq 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2, x \neq 1.$$

Следовательно, область определения неравенства (1) имеет вид:

$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь область

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty). \quad (5)$$

В области (5) числитель дроби из левой части неравенства (1) положителен, откуда вытекает, что для выполнимости неравенства (1) требуется, чтобы и знаменатель дроби был положительным, т.е. должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 3x + 3) > 0 &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (5), вытекает, что должно выполняться соотношение

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty). \quad (6)$$

Чтобы получить ответ задачи, к множеству (6) осталось добавить точку $x = -\frac{3}{2}$, в которой числитель дроби из левой части неравенства (1) обращается в нуль, и неравенство превращается в равенство. Эта точка входит в область (4).

Ответ: $x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{\log_2^2(x+3)}{x^2 - 4x - 5} \geq 0. \quad (7)$$

Решение. Поскольку числитель дроби из левой части неравенства (7) неотрицателен, то выполняется соотношение

$$\frac{\log_2^2(x+3)}{x^2 - 4x - 5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+3) = 0 \\ x^2 - 4x - 5 \neq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \log_2(x+3) \neq 0 \\ x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} \log_2(x+3) = 0 \\ x^2 - 4x - 5 \neq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 1 \\ (x-5)(x+1) \neq 0 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \neq -1, x \neq 5 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = -2\}$$

Кроме того,

$$\begin{cases} \log_2(x+3) \neq 0 \\ x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \neq 1 \\ (x-5)(x+1) > 0 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty) \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{x \in (-3, -1) \cup (5, +\infty), x \neq -2\}$$

Объединяя два найденных множества, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in (-3, -1) \cup (5, +\infty)$

Пример 8. Решить неравенство

$$2 + \log_{\frac{1}{2}} x < \log_2(5x+1).$$

Решение. Заметив, что область определения неравенства имеет вид $x > 0$, проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x < \log_2(5x+1) &\Leftrightarrow 2 - \log_2 x < \log_2(5x+1) \Leftrightarrow 2 < \log_2 x + \log_2(5x+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 < \log_2[x(5x+1)] \Rightarrow 4 < x(5x+1) \Rightarrow 5x^2 + x - 4 > 0. \end{aligned}$$

Чтобы решить неравенство

$$5x^2 + x - 4 > 0, \tag{8}$$

решим, сначала, соответствующее квадратное уравнение:

$$5x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10} \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, решением неравенства (8) является область

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{5}, +\infty\right).$$

Пересечение этого множества с множеством $x > 0$ дает ответ задачи.

Ответ: $x \in \left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$x \cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}(16x^4 - 8x^2 + 1)} < \frac{1}{3}. \quad (9)$$

Решение. Преобразуем, сначала, левую часть неравенства (9) к более простой форме:

$$x \cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}(16x^4 - 8x^2 + 1)} = x \cdot 3^{\log_{3^{-2}}[(4x^2 - 1)^2]} = x \cdot 3^{-\log_3|4x^2 - 1|} = \frac{x}{|4x^2 - 1|}$$

В результате неравенство (9) принимает следующий вид:

$$\frac{x}{|4x^2 - 1|} < \frac{1}{3}, \quad (10)$$

а его областью определения является множество

$$x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}. \quad (11)$$

На множестве (11) неравенство (10) можно переписать в форме

$$3x < |4x^2 - 1|, \quad (12)$$

и приступить к раскрытию модуля, стоящего в правой части неравенства (12), предварительно, заметив, что для значений

$$x \leq 0, x \neq -\frac{1}{2}$$

неравенство (10) выполняется (левая часть меньше или равна нулю, а правая — больше нуля).

В области

$$x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

выражение, стоящее под знаком модуля, положительно, и неравенство (12) решается так:

$$3x < |4x^2 - 1| \Leftrightarrow 3x < 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8}, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 1;$$

$$4x^2 - 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty) \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$

В области

$$x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

выражение, стоящее под знаком модуля отрицательно, и неравенство (12) решается так:

$$3x < |4x^2 - 1| \Leftrightarrow 3x < 1 - 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 < 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8}, x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{4};$$

$$4x^2 + 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Объединяя два случая раскрытия модуля, получаем ответ задачи

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty).$$

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_{3x+\frac{7}{2}}(4x^2 + 4x + 2) \leq 1. \quad (13)$$

Решение. Заметим, сначала, что дискриминант квадратного трехчлена, стоящего под знаком логарифма в неравенстве (13), отрицателен, а поскольку ветви параболы направлены вверх, то квадратный трехчлен принимает только положительные значения, и можно рассмотреть два случая:

Случай 1.

$$3x + \frac{7}{2} > 1 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{6}.$$

В этом случае

$$\log_{3x+\frac{7}{2}}(4x^2+4x+2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{6} \\ 4x^2+4x+2 \leq 3x+\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{6} \\ 4x^2+x-\frac{3}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{6} \\ 8x^2+2x-3 \leq 0 \end{cases}$$

Далее получаем

$$8x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{16} = \frac{-2 \pm 10}{16} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x > -\frac{5}{6} \\ 8x^2+2x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{6} \\ x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Случай 2.

$$0 < 3x + \frac{7}{2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < x < -\frac{5}{6}$$

В этом случае

$$\log_{3x+\frac{7}{2}}(4x^2+4x+2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} < x < -\frac{5}{6} \\ 4x^2+4x+2 \geq 3x+\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} < x < -\frac{5}{6} \\ 4x^2+x-\frac{3}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} < x < -\frac{5}{6} \\ 8x^2+2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} < x < -\frac{5}{6} \\ x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

Объединение результатов, полученных при исследовании случаев 1 и 2, дает ответ задачи.

Ответ: $x \in \left(-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right) \cup \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right].$

Пример 11. Решить неравенство

$$\log_{-2x^2-3x} \left(\frac{5+2^{4+x}}{6} \right) > 0$$

Решение. Сначала решим следующее уравнение

$$\begin{aligned} -2x^2 - 3x = 1 &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1.

$$-2x^2 - 3x > 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$$

В этом случае

$$\log_{-2x^2-3x} \left(\frac{5+2^{4+x}}{6} \right) > 0 \Rightarrow \frac{5+2^{4+x}}{6} > 1 \Leftrightarrow 2^{4+x} > 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$x \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right).$$

Случай 2.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x^2 - 3x < 1 \\ -2x^2 - 3x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 > 0 \\ 2x^2 + 3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right) \\ x \in \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, -1 \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

В этом случае

$$\log_{-2x^2-3x} \left(\frac{5+2^{4+x}}{6} \right) > 0 \Rightarrow \frac{5+2^{4+x}}{6} < 1 \Leftrightarrow 2^{4+x} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4} \right)$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, -1 \right).$$

Объединение результатов, полученных при исследовании случаев 1 и 2, дает ответ задачи.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{3}{2}, -1 \right) \cup \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить неравенства:

1. $(x-3)\log_{\frac{1}{2}} x < 0$
2. $(x-4)\left(\log_{\frac{1}{4}} x - 1\right) < 0$
3. $(x-5)\log_{\frac{1}{3}} x > 0$
4. $x(\log_3 x + 2) > 0$
5. $(x-4)\left(\log_{\frac{1}{4}} x - 1\right) < 0$
6. $4-x < \log_2(6+2^x)$
7. $\log_4(4^x+2)+x > 2+\log_4 5$
8. $3-x > \log_5(20+5^x)$
9. $\log_6(6^{x+1}+11)+x > \log_6 2$
10. $\log_8(8^x+2) < 1-x$
11. $\log_9(9^x+3)+x > 1+\log_9 2$
12. $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) > 0$

$$13. \log_3 \left(\frac{2}{x+2} \right) > 0$$

$$14. \frac{\sqrt{x+5}}{\log_4(x^2 - 3x - 3)} \geq 0$$

$$15. \frac{\log_5^2(x+3)}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$$

$$16. \log_3(x-1) \geq 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+7)$$

$$17. \log_2 x < 1 - 2\log_4(x-1)$$

$$18. 1 + \log_{\frac{1}{10}}(1+x) < \lg(x-2)$$

$$19. 2^{\log_4(25x^4 - 10x^2 + 1)} > 4x$$

$$20. x \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\log_4 \left(\frac{4}{x^2} - 4 + x^2 \right)} \leq 2$$

$$21. 5^{\log_{25}(36x^4 - 12x^2 + 1)} > 5x$$

$$22. x \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{\log_{36} \left(\frac{1}{x^2} - 2 + x^2 \right)} \leq 4$$

$$23. \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_9 \left(\frac{1}{x^2} - 6 + 9x^2 \right)} \geq \frac{1}{x}$$

$$24. \log_{4x+4} \left(5x^2 + 5x + \frac{9}{4} \right) \leq 1$$

$$25. \log_{-4x^2+5x} \left(\frac{1+3^{\frac{1}{2-x}}}{6} \right) > 0$$

$$26. \log_{x+\frac{7}{4}} \left(2x^2 - x + \frac{9}{8} \right) \leq 1$$

$$27. \log_{-5x^2-6x} \left(\frac{3+4^{\frac{1}{3+x}}}{4} \right) > 0$$

$$28. \log_{\frac{7}{6^{-x}}}\left(6x^2 - 2x + \frac{1}{6}\right) \leq 1$$

$$29. \log_{-12x^2+8x}\left(\frac{2+5^{\frac{1}{4-x}}}{3}\right) > 0$$