

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Учебно-методическое пособие для школьников по математике

© К. Л. Самаров, 2010

Пример 1. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$(x+3)\sqrt{5-4x-x^2} \leq 0 \quad (1)$$

Решение. Рассмотрим, сначала, уравнение

$$(x+3)\sqrt{5-4x-x^2} = 0$$

и найдем его корни:

$$5-4x-x^2=0 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) \Leftrightarrow x_1=-5, x_2=1;$$

$$x+3=0 \Leftrightarrow x_3=-3.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что область определения неравенства (1) имеет вид

$$x \in [-5, 1]. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь строгое неравенство

$$(x+3)\sqrt{5-4x-x^2} < 0.$$

В этом случае, в силу того, что квадратный корень положителен, выполняется неравенство

$$x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3,$$

откуда, воспользовавшись (2), получаем, что, решение неравенства (1) имеет вид:

$$x \in [-5, -3] \cup x = 1. \quad (3)$$

Для завершения решения задачи остается заметить, что во множество (3) входят целые числа: $-5, -4, -3, 1$, сумма которых равна -11 .

Ответ: -11 .

Пример 2. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{8-x} > 0.$$

Решение. Сначала найдем решение неравенства. Для этого воспользуемся тем, что подкоренные выражения не могут быть отрицательными:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} - \sqrt{8-x} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > \sqrt{8-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 8-x \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 9 \\ 8 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3, 8]. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что во множество $(3, 8]$ входят следующие целые числа: 4, 5, 6, 7, 8. Сумма этих чисел равна 30.

Ответ: 30.

Пример 3. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{-x^2 + 4x} < 2.$$

Решение. Сначала найдем решение неравенства. Для этого, воспользовавшись тем, что подкоренное выражение не может быть отрицательным, возведем неравенство в квадрат:

$$\sqrt{-x^2 + 4x} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x < 4 \\ -x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > 0 \\ x \in [0, 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \in [0, 4] \end{cases}$$

Теперь заметим, что в найденное множество решений неравенства входят следующие целые числа: 0, 1, 3, 4. Сумма этих чисел равна 8.

Ответ: 8.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x-4} < 1.$$

Решение. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, а подкоренное выражение не может быть отрицательным, возведем (в пределах области определения) неравенство в квадрат:

$$\sqrt{x-4} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 < 1 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4, 5).$$

Ответ: $x \in [4, 5)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3-2x}}{x^2-3x+2} \leq 0. \quad (3)$$

Решение. Перепишем, сначала, неравенство (3) в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{3-2x}}{x^2-3x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}-x}}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{3}{2}-x}}{(x-1)(x-2)} \leq 0.$$

Теперь найдем его область определения:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}-x \geq 0 \\ x \neq 1, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 1, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

В области

$$x \in (-\infty, 1)$$

числитель и знаменатель неравенства (3) положительны, следовательно, неравенство не выполняется.

В области

$$x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

числитель положителен, а знаменатель отрицателен, следовательно, неравенство (3) выполняется.

В точке $x = \frac{3}{2}$ неравенство обращается в верное равенство.

Ответ: $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} \leq 2$$

Решение. С помощью замены переменного

$$\sqrt[6]{x} = y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

получаем

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} \leq 2 &\Leftrightarrow y^2 + y \leq 2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-1) \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in [0, 1]$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{x+6} < x$$

Решение. Поскольку левая часть неравенства не может быть отрицательной, то правая часть неравенства положительна. Следовательно, неравенство можно возвести в квадрат, не забывая при этом об области определения:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} < x &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+6 < x^2 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3, +\infty). \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (3, +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 9} > x - 2 \quad (4)$$

Решение. Поскольку левая часть неравенства (4) неотрицательна, а значения правой части могут иметь любой знак, то возникают два случая:

Случай 1.

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

В этом случае неравенство (4) выполняется и можно получить его решение:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 3 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq 3 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3].$$

Случай 2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-9} > x-2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае обе части неравенства (4) неотрицательны, и неравенство можно возвести в квадрат:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-9} > x-2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9 > x^2-4x+4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 13 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{13}{4} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{13}{4}, +\infty\right).$$

Объединяя результаты двух случаев, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in (-\infty, -3] \cup \left(\frac{13}{4}, +\infty\right).$

Пример 9. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} > x \quad (5)$$

Решение. Поскольку левая часть неравенства (5) неотрицательна, а значения правой части могут иметь любой знак, то возникают два случая:

Случай 1 (правая часть неравенства отрицательна).

В этом случае в пределах области определения неравенство выполняется:

$$\sqrt{x+2} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, 0).$$

Случай 2 (правая часть неравенства неотрицательна).

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае обе части неравенства (5) неотрицательны, и неравенство можно возвести в квадрат:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 2). \end{aligned}$$

Объединяя результаты двух случаев, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in [-2, 2)$.

Пример 10. Решить неравенство

$$2 - x < \sqrt{4 + 3x - x^2} \quad (6)$$

Решение. Поскольку правая часть неравенства (6) неотрицательна, а значения левой части могут иметь любой знак, то возникают два случая:

Случай 1 (левая часть неравенства отрицательна).

В этом случае в пределах области определения неравенство (6) выполняется:

$$\begin{aligned} 2 - x < \sqrt{4 + 3x - x^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 3x - x^2 \geq 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)(x + 1) \leq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4) \leq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, 4]. \end{aligned}$$

Случай 2 (левая часть неравенства неотрицательна).

$$\begin{cases} 2 - x < \sqrt{4 + 3x - x^2} \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае обе части неравенства (6) неотрицательны, и неравенство можно возвести в квадрат:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 - x < \sqrt{4 + 3x - x^2} \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4x + x^2 > 4 + 3x - x^2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x > 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \left(x - \frac{7}{2} \right) > 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Объединяя результаты двух случаев, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, 4]$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{x-4}{\sqrt{8+x}} < 1. \quad (7)$$

Решение. Область определения неравенства (7) имеет вид

$$8+x > 0 \Leftrightarrow x > -8. \quad (8)$$

В области (8) неравенство (7) эквивалентно неравенству

$$x-4 < \sqrt{x+8} \quad (9)$$

Поскольку правая часть неравенства (9) неотрицательна, а значения левой части могут иметь любой знак, то возникают два случая:

Случай 1 (левая часть неравенства отрицательна).

В этом случае в пределах области определения неравенство (9) выполняется:

$$x-4 < \sqrt{x+8} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8 \geq 0 \\ x-4 < 0 \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8, 4).$$

Случай 2 (левая часть неравенства неотрицательна).

$$\begin{cases} x-4 < \sqrt{x+8} \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае обе части неравенства (9) неотрицательны, и неравенство можно возвести в квадрат:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-4 < \sqrt{x+8} \\ x-4 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 < x + 8 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 8 < 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x-1) < 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8) < 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4, 8). \end{aligned}$$

Объединяя результаты двух случаев, получаем ответ задачи.

Ответ: $x \in (-8, 8)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$(x+2)\sqrt{6-x-x^2} \geq 0$$

2. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$(x+4)\sqrt{12-4x-x^2} \leq 0$$

3. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$(x-1)\sqrt{5+4x-x^2} \geq 0$$

4. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{6-x} - \sqrt{3x-2} < 0$$

5. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{3x-4} - \sqrt{4-x} > 0$$

6. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{7-x} - \sqrt{x-3} < 0$$

7. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{-x^2-6x} < 3$$

8. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{-x^2-4x} < 2$$

9. Найти сумму целых значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{-x^2+6x} < 3$$

10. Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} < 1$$

11. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x} > \sqrt{x+2}$$

12. Решить неравенство

$$\sqrt{x+5} > \sqrt{3x-3}$$

13. Решить неравенство

$$(3-x)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$$

14. Решить неравенство

$$(x+3)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$$

15. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x-8} \leq 0$$

16. Решить неравенство

$$(x+2)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0$$

17. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}}{x^2-x-6} \leq 0$$

18. Решить неравенство

$$(5-x)\sqrt{x^2-5x+4} \geq 0$$

19. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x-6}}{x^2-6x-7} \leq 0$$

20. Решить неравенство

$$x-3\sqrt{x}-4 \leq 0$$

21. Решить неравенство

$$\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2 \leq 0$$

22. Решить неравенство

$$x^3-7x\sqrt{x} \leq 8$$

23. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-16} > x-3$$

24. Решить неравенство

$$4-x < \sqrt{16+6x-x^2}$$

25. Решить неравенство

$$\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$$

26. Решить неравенство

$$\sqrt{24-2x-x^2} < x$$

27. Решить неравенство

$$\frac{3-x}{\sqrt{x-1}} > -1$$

28. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+6x-5} < 8-2x$$

29. Решить неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{x+56}} < 1$$