Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1 курс

В пособии изучаются простейшие свойства открытых и замкнутых множеств в n-мерных евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$.

Внутренние точки множества. Открытые множества

Определение 1 *δ - окрестностью точки a в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют множество точек*

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; \rho(x, a) < \delta\}$$

где $\rho(x, a)$ – расстояние между точками x и a.

Определение 2 *Точку a называют внутренней точкой множества A, если существует такая δ - окрестность $U_\delta(a)$, что $U_\delta(a) \subset A$.*

Определение 3 *Множество A называют открытым, если все его точки – внутренние.*

Задача 1 *Пусть $A = (-\infty; 0) \cup (2; 5] \cup \{8\}$. Найдите все внутренние точки множества A. Является ли множество A открытым?*

Решение. Множество A отмечено на рисунке 1 красным цветом

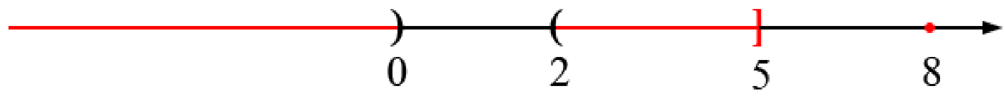

Рис. 1

Как показано на рисунке 2, для каждой точки $a \in (-\infty; 0)$ существует такая δ - окрестность $U_\delta(a)$, что $U_\delta(a) \subset (-\infty; 0)$.

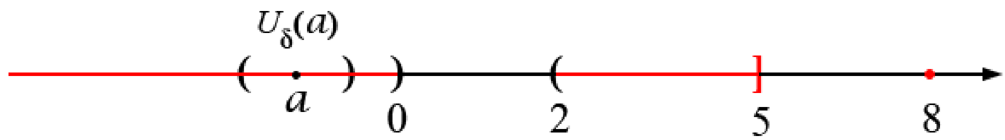

Рис. 2

Точно также (см. рис. 3) для каждой точки $a \in (2; 5)$ существует такая δ - окрестность $U_\delta(a)$, что $U_\delta(a) \subset (2; 5)$.

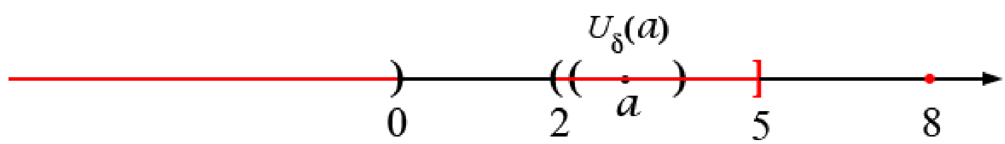

Рис. 3

Таким образом, каждая точка множества $(-\infty; 0) \cup (2; 5)$ является внутренней точкой множества A.

Других внутренних точек у множества A нет.

Действительно, поскольку любая окрестность точки $a = 5$ содержит точки интервала $(5; 8)$, не входящего в A, то точка $a = 5$ не является внутренней точкой множества A . Аналогично и точка $a = 8$ не является внутренней точкой множества A.

Поскольку не все точки множества A внутренние, то A не является открытым множеством.

Задача 2 (задание §1, №14) *Пусть* G_i, $i \in \mathbb{N}$, *– произвольные открытые множества из* $\mathbb{R}^n$. *Доказать, что множества* $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ *и* $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ *являются открытыми.*

Доказательство.

1. Докажем сначала, что множество $\bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ открыто.

Для этого рассмотрим произвольную точку $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ и докажем, что у нее существует окрестность $U_\delta(a) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$.

Поскольку $a \in G_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, и каждое G_i – открытое множество, то существуют такие окрестности $U_{\delta_i}(a)$, что $U_{\delta_i}(a) \subset G_i$.

Положим

$$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$$

Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ справедливы включения

$$U_\delta(a) \subset U_{\delta_i}(a) \subset G_i$$

Следовательно,

$$U_\delta(a) \subset \bigcap_{i=1}^{m} G_i$$

Доказано.

2. Докажем, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ открыто.

Для этого рассмотрим произвольную точку $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ и докажем, что у нее существует окрестность $U_\delta(a) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$.

Так как $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, то существует хотя бы одно множество G_k такое, что $a \in G_k$.

Множество G_k открытое, следовательно, существует окрестность $U_\delta(a) \subset G_k$. Но тогда

$$U_\delta(a) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

Доказано.

Заметим, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может и не быть открытым множеством. В следующей задаче строится именно такой пример.

Задача 3 (задание §1, №15) *Построить последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.*

Решение. Рассмотрим последовательность вложенных интервалов

$$(-1;1) \supset \left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right) \supset \left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \supset \ldots \supset \left(-\frac{1}{n}\,;\,\frac{1}{n}\right) \supset \ldots$$

Пересечением всех этих интервалов является множество, состоящее из единственной точки $\{0\}$. Очевидно, это множество не является открытым.

Линейно связные множества. Области

Определение 4 *Множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству, называют линейно связным.*

Множество, состоящее из одной точки, также считают линейно связным.

Определение 5 *Линейно связное открытое множество называют областью.*

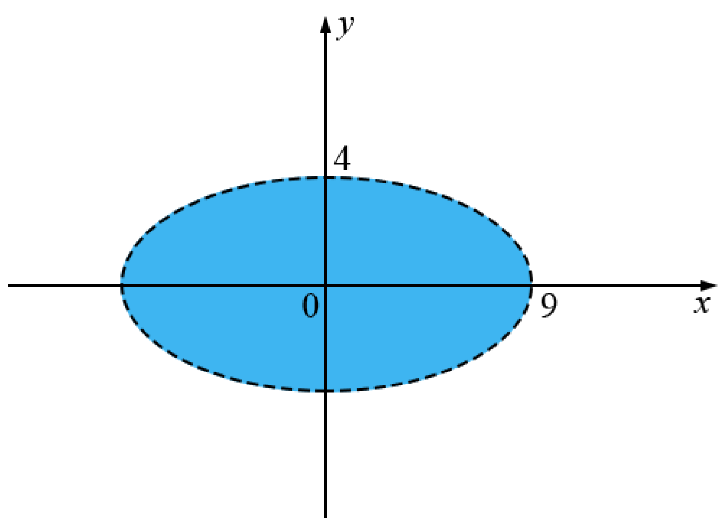

Рис. 4

Примером области является изображенная на рисунке 4 внутренность эллипса

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} < 1$$

А множество, состоящее из объединения двух кругов

$$\{(x-2)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x+2)^2 + y^2 < 1\}$$

изображенное на рисунке 5, является открытым множеством, но не областью, поскольку не является линейно связным.

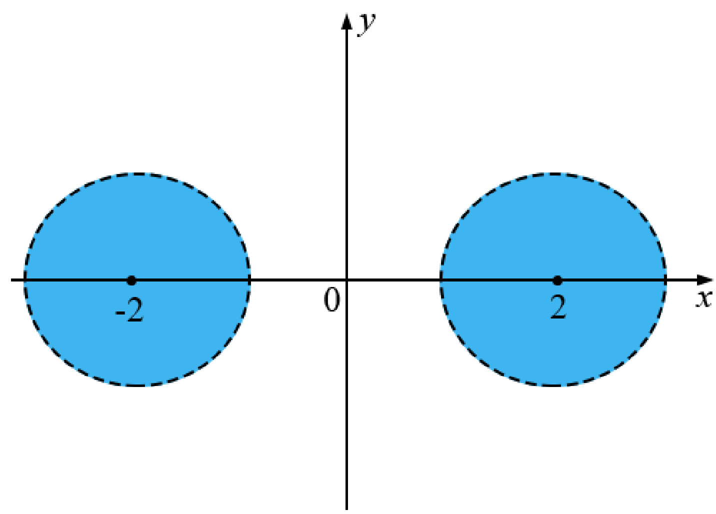

Рис. 5

Точки прикосновения. Предельные точки. Изолированные точки. Граничные точки. Граница множества

Определение 6 *Точку* a *называют* *точкой прикосновения* *множества* A, *если любая окрестность* $U_\delta(a)$ *содержит хотя бы одну точку множества* A.

Определение 7 *Точку* a *называют* *предельной точкой* *множества* A, *если любая окрестность* $U_\delta(a)$ *содержит хотя бы одну точку множества* A, *отличную от самой точки* a.

Определение 8 *Точку a называют граничной точкой множества A, если любая окрестность $U_\delta(a)$, содержит как точку из множества A, так и точку, не входящую в множество A.*

Определение 9 *Множество все граничных точек множества A называют границей множества A и обозначают ∂A.*

Определение 10 *Точку $a \in A$ называют изолированной точкой множества A, если существует такая окрестность $U_\delta(a)$, в которой содержится единственная точка из множества A, а именно, сама точка a.*

Проиллюстрируем введенные понятия на примере множества, рассмотренного в задаче 1.

Задача 4 *Пусть $A = (-\infty; 0) \cup (2; 5] \cup \{8\}$. Найдите у множества A, все*

1. *точки прикосновения;*
2. *предельные точки;*
3. *граничные точки;*
4. *изолированные точки.*

Решение. Множество A отмечено на рисунке 1 красным цветом

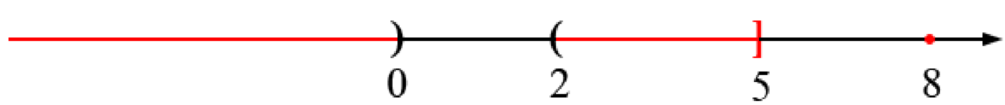

Рис. 6

1. Точки прикосновения.

   Кроме точек, входящих в множество A, точками прикосновения будут еще и точки $a = 0$ и $a = 2$, поскольку любая окрестность каждой из этих точек содержит точки множества A.

   Итак, множество точек прикосновения: $(-\infty; 0] \cup [2; 5] \cup \{8\}$.

2. Предельные точки.

   Для того, чтобы найти предельные точки, нужно из множества точек прикосновения удалить те точки, у которых в какой-либо проколотой окрестности нет ни одной точки из множества A. В рассматриваемом случае нужно удалить точку $a = 8$.

   В результате получаем множество предельных точек: $(-\infty; 0] \cup [2; 5]$.

3. Граничные точки.

   Граничными точками множества A являются точки $\{0\}, \{2\}, \{5\}, \{8\}$, поскольку каждая окрестность каждой из этих точек содержит как точки множества A, так и точки, в это множество не входящие.

4. Изолированные точки.

   Изолированной точкой множества A является только точка $\{8\}$, поскольку у этой точки существует проколотая окрестность, в которой нет ни одной точки множества A.

Задача 5 (задание §1, №18) *Построить множество, все точки которого изолированные, а множество его предельных точек непустое.*

Решение. Рассмотрим множество

$$\left\{1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,, \ldots,\ \frac{1}{n}\,, \ldots\right\}$$

Все точки этого множества изолированы, а точка $\{0\}$, не входящая в это множество, является его единственной предельной точкой.

Замкнутые множества

Определение 11 *Множество называют замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Определение 12 *Множество всех точек прикосновения множества A называют замыканием множества A и обозначают $\overline{A}$.*

Решим несколько задач на эту тему.

Задача 6 (задание §1, №37) *Привести пример замкнутого множества, не равного замыканию множества своих внутренних точек.*

Решение. Рассмотрим множество $F = \Big\{[0;1] \cup \{2\}\Big\}$.

Это множество замкнуто, поскольку оно совпадает с множеством своих точек прикосновения.

Множеством внутренних точек F является интервал $(0;1)$. Замыканием множества внутренних точек F является отрезок $[0;1]$. Как видим, этот отрезок не совпадает с F.

Задача 7 (задание Т3) *Является ли множество*

$$A = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1 + x_4^2 \Big\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$: *а) открытым; б) замкнутым; в) областью?*

Решение.

а). Рассмотрим функцию

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - 1 - x_4^2$$

Поскольку функция F непрерывна на $\mathbb{R}^4$, то множество точек

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ F(x_1, x_2, x_3, x_4) < 0 \Big\}$$

открыто.

б). Точка $a = (0, 0, 0, 0)$ является точкой прикосновения множества A, поскольку в любой ее окрестности найдется точка

$$a_n = \left(0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ \frac{1}{n}\right)$$

лежащая в множестве A. Однако сама точка $a = (0, 0, 0, 0)$ не принадлежит множеству A.

Следовательно, множество A не является замкнутым.

в). Докажем, что множество A не является линейно связным. Воспользуемся методом «от противного» и предположим, что оно линейно связное.

Заметим, что если точка $M_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит множеству A, то и точка $M_2 = (x_1, x_2, x_3, -x_4)$ тоже принадлежит множеству A.

Тогда существует непрерывная кривая $\gamma(t)$, соединяющая точки M_1 и M_2, целиком лежащая в множестве A. В таком случае эта кривая должна пройти через точку M_3, с координатой $x_4 = 0$. Однако таких точек во множестве A нет, поскольку

$$e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \geqslant 1$$

Таким образом, множество A не является линейно связным, а, значит, не является областью.

Спасибо за внимание.
Не болейте!