Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для подготовки

к ЕГЭ по математике

© К. Л. Самаров, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Решение.

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$$

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos x - 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$$

Решение. С помощью формулы «Косинус двойного угла» получаем:

$$\cos x - 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - 2\right) = 0$$

Возникают два случая:

1. $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

2. $\cos\frac{x}{2} = 2$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Пример 3. Решить уравнение

$$3\sin^2 x - \sin x = 2\cos x - 3\sin 2x$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла» и разложением на множители, получаем:

$$3\sin^2 x - \sin x = 2\cos x - 3\sin 2x \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) = 2\cos x - 6\sin x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) = 2\cos x(1 - 3\sin x) \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) - 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 2\cos x)(3\sin x - 1) = 0$$

Возникают два случая:

1. $\sin x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -2 \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z$

2. $3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ. $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z;\ (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла» и разложением на множители, получаем

$$\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0$$

Возникают два случая:

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$

2. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ. $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;\ \ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1 + \sin x$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Основное тригонометрическое тождество», получаем:

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1+\sin x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1-\sin x} - (1+\sin x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x - (1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x - \cos^2 x}{1-\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\sin x} = 0$$

Возникают два случая:

1. $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

2. $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \ 2\pi k,\ k \in Z$

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x$$

Решение. Основой решения задачи является разложение на множители:

$$\frac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x} + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x + 2\cos x\left(1+\sin x\right)}{1+\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x\left(\sin x + 1 + \sin x\right)}{1+\sin x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x\left(2\sin x + 1\right)}{1+\sin x} = 0$$

Возникают два случая:

1. $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

2. $\begin{cases} 2\sin x + 1 = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left(-1\right)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \left(-1\right)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{2\cos x}{\sin 3x + \sin x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\sin 2x$$

Решение. Решение задачи основывается на применении формулы «Сумма синусов», с помощью которой исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно функции $\sin 2x$.

$$\frac{2\cos x}{\sin 3x + \sin x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow \frac{2\cos x}{2\sin 2x\cos x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin 2x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\sin 2x \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = \frac{11}{6}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x - 11\sin 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\sin 2x\right)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{6} =$$

$$= \frac{11 \pm 7}{6} \Leftrightarrow \left(\sin 2x\right)_1 = \frac{2}{3},\ \left(\sin 2x\right)_2 = 3$$

Возникают два случая:

1.

$$\sin 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\cdot(-1)^k \cdot \arcsin\frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$$

2.

$\sin 2x = 3.$ В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\frac{1}{2}\cdot(-1)^k \cdot \arcsin\frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin 2x = \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x)$$

Решение. Решение задачи основывается на использовании формул «Синус двойного угла» и «Разность синусов»:

$$\sin 2x = \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 2x - \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \frac{6}{7}\sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\left(1 - \frac{6}{7}\cos x\right) = 0$$

Возникают два случая:

1. $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

2. $1 - \frac{6}{7}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{7}{6}.$ В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin 7x + \sin 5x$$

Решение. Решение задачи использует три формулы: «Синус разности», «Сумма синусов», «Разность синусов»:

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin 7x + \sin 5x \Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin 6x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\sin 6x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x - \sin 6x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\cos x \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{7x}{2} = 0$$

Возникают три случая:

1. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

2. $\sin \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}\pi k, k \in Z$

3. $\cos \frac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k, k \in Z$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,\quad \frac{2}{5}\pi k, k \in Z,\quad \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k, k \in Z$

Пример 10. Решить уравнение

$$\cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 10x$$

Решение. Воспользовавшись формулами «Сумма косинусов» и «Разность косинусов», получаем:

$$\cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 10x \Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x = 2\cos 11x \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x \cos x - \cos 11x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\cos 3x - \cos 11x\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x \sin 7x \sin 4x = 0$$

Возникают три случая:

1. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

2. $\sin 7x = 0 \Leftrightarrow 7x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}\pi k, k \in Z$

3. $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi k, k \in Z$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,\quad \frac{1}{7}\pi k, k \in Z,\quad \frac{1}{4}\pi k, k \in Z$

Пример 11. Решить уравнение

$$\sin x = \sin 5x$$

Решение. Воспользуемся формулой «Разность синусов»:

$$\sin x = \sin 5x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 3x = 0$$

Возникают два случая:

1.

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k,\, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

2.

$$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi k, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi k}{2}, k \in Z;\quad \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi k, k \in Z$

Пример 12. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}x$$

Решение. Решение задачи основано на использовании свойств функции $y = \mathrm{tg}x$:

$$\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \pi k,\, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in Z \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k,\, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi m,\, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k,\, k \in Z \\ \frac{1}{2}\pi k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in Z \\ \frac{1}{2}\pi k \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi m,\, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k,\, k \in Z \\ k \neq 1 + 2n,\, n \in Z \\ 3k \neq 1 + 2m,\, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi s,\, s \in Z$$

Ответ. $\pi s,\, s \in Z$

Пример 13. Решить уравнение

$$1 - 6\cos 2x = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$$

Решение. Решение задачи основывается на применении формулы «Косинус двойного угла», с помощью которой исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно функции $\sqrt{\cos 2x}$:

$$1-6\cos 2x=\sqrt{1-2\sin^2 x} \Leftrightarrow 1-6\cos 2x=\sqrt{\cos 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\cos 2x+\sqrt{\cos 2x}-1=0 \Leftrightarrow 6\left(\sqrt{\cos 2x}\right)^2+\sqrt{\cos 2x}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\cos 2x}\right)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}$$

Возникают два случая:

1.

$$\sqrt{\cos 2x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2x=2\pi k\pm\arccos\frac{1}{9},\ k\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}, k\in Z$$

2.

$\sqrt{\cos 2x}=-\frac{1}{2}$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}, k\in Z$

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x}=\frac{1}{3}-\sin x \qquad (1)$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», перепишем уравнение (1) в виде:

$$\sqrt{1-2\sin^2 x}=\frac{1}{3}-\sin x. \qquad (2)$$

Если теперь совершить в уравнении (2) замену переменного по формуле:

$$y=\sin x, \quad -1\le y\le 1, \qquad (3)$$

то получается иррациональное уравнение

$$\sqrt{1-2y^2}=\frac{1}{3}-y. \qquad (4)$$

Поскольку левая часть уравнения (4) неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, следовательно, переменная y также должна удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{3} - y \ge 0 \Leftrightarrow y \le \frac{1}{3}.$$

Таким образом, переменная y должна быть заключена в пределах:

$$-1 \le y \le \frac{1}{3}. \qquad (5)$$

Далее получаем:

$$\sqrt{1-2y^2} = \frac{1}{3} - y \Rightarrow 1 - 2y^2 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}y + y^2 \Rightarrow 3y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27y^2 - 6y - 8 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+864}}{54} = \frac{6 \pm 30}{54} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}, \quad y_2 = -\frac{24}{54} = -\frac{4}{9}.$$

В силу (5) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\sin x = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{4}{9} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $(-1)^{k+1} \arcsin\frac{4}{9} + \pi k, k \in Z$

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x + 2} = 1 + 4\cos x \qquad (6)$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», перепишем уравнение (6) в виде:

$$\sqrt{2\cos^2 x + 1} = 1 + 4\cos x \qquad (7)$$

Если теперь совершить в уравнении (7) замену переменной по формуле:

$$y = \cos x, \quad -1 \le y \le 1, \qquad (8)$$

то получается иррациональное уравнение

$$\sqrt{2y^2 + 1} = 1 + 4y. \qquad (9)$$

Поскольку левая часть уравнения (9) неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, следовательно, переменная y также должна удовлетворять неравенству:

$$1+4y\ge 0 \Leftrightarrow y\ge -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, переменная y должна быть заключена в пределах:

$$-\frac{1}{4}\le y\le 1. \tag{10}$$

Далее получаем:

$$\sqrt{2y^2+1}=1+4y \Rightarrow 2y^2+1=1+8y+16y^2 \Rightarrow 14y^2+8y=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y^2+4y=0 \Rightarrow y(7y+4)=0 \Rightarrow y_1=-\frac{4}{7},\ y_2=0.$$

В силу (10) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{6+3\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}x\sqrt{1+4\operatorname{ctg}x}$$

Решение. В результате замены переменной

$$y=\operatorname{tg}x,\ y>0 \tag{11}$$

уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{6+3y}=y\sqrt{1+\frac{4}{y}}$$

Далее получаем:

$$\sqrt{6+3y}=y\sqrt{1+\frac{4}{y}} \Rightarrow 6+3y=y^2\left(1+\frac{4}{y}\right) \Rightarrow 6+3y=y^2+4y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2+y-6=0 \Rightarrow (y+3)(y-2)=0 \Rightarrow y_1=-3,\ y_2=2.$$

В силу (11) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\operatorname{tg}x=2 \Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}2+\pi k, k\in Z$$

Ответ. $\operatorname{arctg}2+\pi k, k\in Z$

Пример 17. Решить уравнение

$$15\,\mathrm{ctg}x = 4\sin x$$

Решение. Решение задачи основано на использовании свойств функции $\mathrm{ctg}x$ и применении «Основного тригонометрического тождества»:

$$15\,\mathrm{ctg}x = 4\sin x \Rightarrow \frac{15\cos x}{\sin x} - 4\sin x = 0 \Rightarrow \frac{15\cos x - 4\sin^2 x}{\sin x} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{15\cos x - 4\left(1-\cos^2 x\right)}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{4\cos^2 x + 15\cos x - 4}{\sin x} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 15\cos x - 4 = 0 \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225+64}}{4} \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \dfrac{-15 \pm 17}{4} \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow (\cos x)_1 = -8,\ (\cos x)_2 = \frac{1}{2}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$$

Ответ. $2\pi k \pm \dfrac{\pi}{3}, k \in Z$

Пример 18. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\mathrm{ctg}x + \frac{5}{3\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Решение. Решение задачи основано на использовании свойств функции $\mathrm{ctg}x$ и применении «Основного тригонометрического тождества».

$$\frac{1}{2}\mathrm{ctg}x+\frac{5}{3\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{5}{3\cos x}=\frac{2}{2\sin x\cos x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3\cos^2 x+10\sin x-6}{6\sin x\cos x}=0\Rightarrow\frac{3\left(1-\sin^2 x\right)+10\sin x-6}{\sin x\cos x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3-3\sin^2 x+10\sin x-6}{\sin x\cos x}=0\Rightarrow\frac{3\sin^2 x-10\sin x+3}{\sin x\cos x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\sin x)_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}\\ \sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Rightarrow(\sin x)_1=3,\ (\sin x)_2=\frac{1}{3}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\sin x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,k\in Z$$

Ответ. $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,k\in Z$

Пример 19. Решить уравнение

$$-\frac{7}{6}\mathrm{tg}2x=\cos x$$

Решение. Решение задачи использует формулы «Синус двойного угла» и «Косинус двойного угла».

$$-\frac{7}{6}\mathrm{tg}2x=\cos x\Leftrightarrow-\frac{7}{6}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\cos x=0\Leftrightarrow\frac{7\sin 2x+6\cos x\cos 2x}{\cos 2x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{14\sin x\cos x+6\cos x\cos 2x}{\cos 2x}=0\Leftrightarrow\frac{\cos x\left(7\sin x+3\cos 2x\right)}{\cos 2x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos x\left(7\sin x+3-6\sin^2 x\right)}{\cos 2x}=0\Leftrightarrow\frac{\cos x\left(6\sin^2 x-7\sin x-3\right)}{\cos 2x}=0$$

Возникают два случая:

1.

$$\begin{cases}\cos x=0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ 2\cos^2 x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$$

2.

$$\begin{cases}6\sin^2 x-7\sin x-3=0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\sin^2 x-7\sin x-3=0\\ 1-2\sin^2 x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sin x)_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+72}}{12}\\ 2\sin^2 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sin x)_{1,2}=\dfrac{7\pm 11}{12}\\ 2\sin^2 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sin x)_1=\dfrac{18}{12}=\dfrac{3}{2}\\ 2\sin^2 x\neq 1\end{cases}\cup\begin{cases}(\sin x)_2=-\dfrac{4}{12}=-\dfrac{1}{3}\\ 2\sin^2 x\neq 1\end{cases}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\begin{cases}\sin x=-\dfrac{1}{3}\\ 2\sin^2 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k, k\in Z$$

Ответ. $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k, k\in Z$

Пример 20. Решить уравнение

$$(1+\cos x)\operatorname{ctg} x=2\sin 2x$$

Решение.

$$(1+\cos x)\operatorname{ctg} x=2\sin 2x\Leftrightarrow\frac{(1+\cos x)\cos x}{\sin x}-4\sin x\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos x+\cos^2 x-4\sin^2 x\cos x}{\sin x}=0\Leftrightarrow\frac{\cos x+\cos^2 x-4\left(1-\cos^2 x\right)\cos x}{\sin x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\cos^3 x+\cos^2 x-3\cos x}{\sin x}=0\Leftrightarrow\frac{\cos x\left(4\cos^2 x+\cos x-3\right)}{\sin x}=0$$

Возникают два случая:

1. $\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

2.

$$\begin{cases}4\cos^2 x+\cos x-3=0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos x)_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{8}\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos x)_{1,2}=\dfrac{-1\pm 7}{8}\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos x)_1=-1\\ \sin x\neq 0\end{cases}\cup\begin{cases}(\cos x)_2=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}\\ \sin x\neq 0\end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

решений не имеет.

Решением системы

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{3}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

являются числа:

$$x = 2\pi k \pm \arccos\frac{3}{4}, k \in Z$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \quad 2\pi k \pm \arccos\dfrac{3}{4}, k \in Z$

Пример 21. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x = \frac{1}{\cos x}$$

Решение.

$$\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sin x\right)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sin x\right)_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sin x\right)_1 = 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \left(\sin x\right)_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

В первом случае система решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\begin{cases} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$$

Ответ. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Следующие два примера решаются с помощью формул приведения.

Пример 22. Решить уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$$

Решение.

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi) \Leftrightarrow \sin 2x = -\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \bigcup \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi k, k \in Z,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}\pi k, k \in Z;\quad \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Пример 23. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

Решение. Поскольку

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x),$$

то исходное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{4}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}-2\sqrt{2}(\cos x-\sin x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\cos x}{\cos x\sin x}+2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=0\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{\cos x\sin x}+2\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)\left(\frac{1+2\sqrt{2}\cos x\sin x}{\cos x\sin x}\right)=0$$

В результате возникают два случая.

1.

$$\begin{cases}\sin x-\cos x=0\\ \sin x\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\cos x\\ \sin x\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sin x}{\cos x}=1\\ \sin x\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

2.

$$\frac{1+2\sqrt{2}\cos x\sin x}{\cos x\sin x}=0\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{2}\sin 2x}{\sin 2x}=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\pi k,\ k\in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;\quad (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$

Пример 24. Решить уравнение

$$|\cos x|=\cos x-\frac{15}{2}\operatorname{tg}x$$

Решение. Рассмотрим, сначала, случай $\cos x>0$. Тогда $|\cos x|=\cos x$ и уравнение принимает вид

$$\begin{cases}-\dfrac{15}{2}\operatorname{tg}x=0\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\pi k, k\in Z\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow 2\pi n, n\in Z$$

Теперь рассмотрим случай $\cos x<0$. Тогда $|\cos x|=-\cos x$ и исходное уравнение принимает вид

$$\begin{cases} -\cos x = \cos x - \dfrac{15}{2}\operatorname{tg}x \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x - \dfrac{15}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 15\sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(1-\sin^2 x\right) - 15\sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4\sin^2 x - 15\sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 x + 15\sin x - 4 = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225+64}}{8} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \dfrac{-15 \pm 17}{8} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = -4 \\ \cos x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (\sin x)_2 = \dfrac{1}{4} \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Во втором случае получаем

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{4} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi k + \pi,\ k \in Z$$

Ответ. $-\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi k + \pi,\ k \in Z$

Пример 25. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg}x| = \operatorname{tg}x + \frac{4}{3}\cos x$$

Решение. Рассмотрим, сначала, случай $\operatorname{tg}x \ge 0$. Тогда $|\operatorname{tg}x| = \operatorname{tg}x$ и уравнение принимает вид

$$\cos x = 0,$$

что невозможно, т.к. при этом не существует $\operatorname{tg}x$

Теперь рассмотрим случай $\operatorname{tg}x < 0$. Тогда $|\operatorname{tg}x| = -\operatorname{tg}x$ и исходное уравнение принимает вид

$$\begin{cases} -\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}x + \frac{4}{3}\cos x \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathrm{tg}x + \frac{4}{3}\cos x = 0 \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2}{3}\cos x = 0 \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin x + 2\cos x}{\cos x} = 0 \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x + 2\cos x = 0 \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x = -2\cos x \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}x = -\frac{2}{3} \\ \mathrm{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{tg}x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ. $-\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $\sqrt{2\cos^2 x - 1} = 1 - 12\cos 2x$
2. $\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{7}{3} = 2\sin 2x$
3. $\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 2\cos x - \frac{1}{2}$
4. $\sqrt{\mathrm{ctg}x + 12} = \mathrm{ctg}x\sqrt{1 + 2\mathrm{tg}x}$
5. $10\mathrm{ctg}^2 x = \frac{9}{\sin x} - 1$
6. $8\mathrm{tg}x = 3\cos x$
7. $\frac{3}{2\cos x} = \mathrm{tg}^2 x$
8. $\frac{4}{\cos x} = 4\mathrm{tg}x + 3\cos x$
9. $\mathrm{tg}x + \frac{13}{6\sin x} = \frac{4}{\sin 2x}$
10. $5\sin x = \frac{6}{\sin x} - 6\mathrm{ctg}x$
11. $7\mathrm{tg}2x = 4\sin x$

12. $(1+\sin x)\operatorname{tg}x = 3\sin 2x$

13. $\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x = \dfrac{1}{\sin x}$

14. $\sin 2x = \dfrac{2}{7}(\cos 3x - \cos x)$

15. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}$

16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

17. $\operatorname{ctg}^2 x = 3$

18. $5\sin x + 2\sin 2x = 0$

19. $4\sin\dfrac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

20. $3\cos x + \sin 2x = 0$

21. $2\cos^2 x - \cos x = \sin x - \sin 2x$

22. $6\cos 2x \cdot \cos x = 1 - 2\sin^2 x$

23. $\sin 2x - 4\sin^2 x = 2\sin x - \cos x$

24. $5\cos 2x \cdot \sin x = 2\cos^2 x - 1$

25. $\cos x - \sin x = 4\cos^2 x - 2\sin 2x$

26. $4\sin 2x + 4\sin x = 2\cos x + 1$

27. $3\sin 2x + \cos x = 6\sin x + 1$

28. $\sin\left(3x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \sin(6x - 3\pi)$

29. $\sin 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

30. $\sqrt{3}\cos 4\left(3x + \dfrac{7\pi}{2}\right) = \sin(8x - 5\pi)$

31. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \dfrac{5\pi}{4}\right)$

32. $\sin\left(2x-7\pi\right)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

33. $\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)=\cos x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

34. $\left|\sin x\right|=\sin x-\dfrac{16}{3}\mathrm{ctg}x$

35. $\left|\mathrm{ctg}x\right|=\mathrm{ctg}x-\dfrac{4}{3}\sin x$

36. $\sin 2x\cos 8x+\cos 2x\sin 8x=\sin 7x-\sin 3x$

37. $\cos 5x-\cos x=\cos 12x-\cos 8x$

38. $\sin 2x=\sqrt{3}\sin x$

39. $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$

40. $\sin 2x=2-2\cos^2 x$

41. $\mathrm{ctg}3x=\mathrm{ctg}5x$

42. $\cos 2x=\cos 6x$

43. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=1-\cos x$

44. $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}=2\sin x$

45. $\sqrt{4\cos^2 x-3}=4\sin x-1$

46. $\sqrt{\cos 2x}=1+2\sin x$

47. $\sqrt{3\sin^2 x-2}=3\cos x-1$