

## Вариант 1

### Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19. Сократите дробь  $\frac{3^2 \cdot 36^n}{2^{2n+1} \cdot 3^{2n}}$ .

**Решение.**  $\frac{3^2 \cdot 36^n}{2^{2n+1} \cdot 3^{2n}} = \frac{3^2 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^n}{2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}} = \frac{3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}}{2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}} = \frac{9}{2} = 4,5.$

**Ответ:** 4,5.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Верно применены свойства степени с целым показателем, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20. Первая труба наполняет бассейн в  $1\frac{1}{5}$  раза быстрее второй. Сколько литров в минуту пропускает первая труба, если известно, что она пропускает на 9 литров в минуту больше, чем вторая?

**Решение.** Пусть первая труба пропускает  $x$  литров в минуту, тогда вторая труба пропускает  $x - 9$  литров в минуту.

Первая труба наполняет бассейн за  $\frac{1}{x}$  минут, вторая –  $\frac{1}{x-9}$  минут.

По условию вторая труба наполняет бассейн дольше в  $1\frac{1}{5}$  раза, получаем  $\frac{1}{x-9} : \frac{1}{x} = \frac{6}{5}$ ,

$$5x = 6x - 54, \quad x = 54.$$

Значит, первая труба пропускает 54 литра в минуту.

**Ответ:** 54 литра в минуту.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

21. Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  (с основаниями  $AB$  и  $CD$ ) пересекаются в точке  $O$ . Докажите равенство площадей треугольников  $AOD$  и  $COB$ .

**Решение.**

Прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны, следовательно, расстояния от точек  $D$  и  $C$  до прямой  $AB$  равны, тогда треугольники  $ABD$  и  $ABC$  равновелики как треугольники с общим основанием и равными высотами.

$$S_{AOB} + S_{AOD} = S_{ABD} = S_{ACB} = S_{AOB} + S_{COB}, \text{ откуда получаем } S_{AOD} = S_{COB}.$$

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно	3
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

22. Постройте график функции  $y = \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 3)}{x-1}$  и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

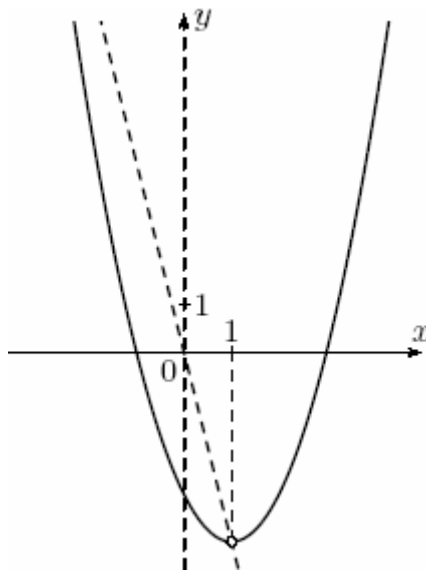
**Решение.**

$$\frac{(x+1)(x^2 - 4x + 3)}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x-1} = (x+1)(x-3) \text{ при } x \neq 1.$$

Графиком функции является парабола с «выколотой» вершиной  $(1; -4)$ .

Ветви параболы направлены вверх, парабола проходит через точки  $(-1; 0)$ ,  $(3; 0)$ .

Построим график.



Прямая, проходящая через начало координат и через «выколотую» точку (см. рисунок), имеет с графиком ровно одну общую точку:  $y = -4x$ .

Ось  $Oy$  имеет с графиком функции ровно одну общую точку:  $x = 0$  (см. рисунок).

**Ответ:**  $y = -4x$ ,  $x = 0$ .

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, но указана только одна прямая (не рассмотрена ось ординат)	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

23. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $AB = BC = CD$ ,  $AM = MD$  и  $\angle ADC \neq \angle BAD$ . Найдите угол  $CMD$ .

**Решение.**

Обозначим  $\angle MAD = \angle MDA = \beta$ ,  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ .

По теореме о внешнем угле треугольника  $\angle CMD = 2\beta$ .

Через точку  $B$  проведем прямую, параллельную  $AD$ . Пусть эта прямая пересекается с продолжением диагонали  $AC$  в точке  $K$ .

Тогда  $ABKD$  – равнобокая трапеция,  $DK = AB = CD$ ,  $\angle BDK = \angle BAK = \alpha$ ,

$\angle KCD = \angle CKD = \angle AKD = \angle ABD = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \beta = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ .

По теореме о внешнем угле треугольника

$\angle CDM = \angle KCD - \angle CMD = (180^\circ - \alpha - 2\beta) - 2\beta = 180^\circ - \alpha - 4\beta$ . Тогда

$\angle CBD = \angle CDB = \angle CDM = 180^\circ - \alpha - 4\beta$ , а так как  $AMB$  – внешний угол треугольника  $BMC$ , то  $\angle AMB = \angle MCB + \angle CBM$ , или  $2\beta = \alpha + (180^\circ - \alpha - 4\beta)$ , откуда находим, что

$\beta = 30^\circ$ . Следовательно,  $\angle CMD = 2\beta = 60^\circ$ .

**Ответ:**  $60^\circ$ .

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

**Вариант 1**

1. 3
2. 1
3. 2
4.  $\left[ -\frac{1}{6}; 1 \right]$
5. 4
6. 55
7.  $-0,2$
8.  $q_1 = \frac{Fr^2}{kq_2}$
9. 213
10.  $(-2; 2)$
11. 16
12. 928
13.  $0,25$
14. 1
15. 6
16. 128
17. 120
18. 23

**Вариант 2**  
**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

19. Сократите дробь  $\frac{2^{2n+3} \cdot 6^n}{2^2 \cdot 24^n}$ .

**Решение.**  $\frac{2^{2n+3} \cdot 6^n}{2^2 \cdot 24^n} = \frac{2^3 \cdot 2^{2n} \cdot 6^n}{2^2 \cdot (2^2 \cdot 6)^n} = \frac{2 \cdot 2^{2n} \cdot 6^n}{2^{2n} \cdot 6^n} = 2$ .

**Ответ:** 2.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Верно применены свойства степени с целым показателем, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20. Первая труба наполняет бассейн в  $1\frac{2}{7}$  раза быстрее второй. Сколько литров в минуту пропускает вторая труба, если известно, что она пропускает на 14 литров в минуту меньше, чем первая?

**Решение.** Пусть вторая труба пропускает  $x$  литров в минуту, тогда первая труба пропускает  $x + 14$  литров в минуту.

Вторая труба наполняет бассейн за  $\frac{1}{x}$  минут, первая –  $\frac{1}{x+14}$  минут.

По условию вторая труба наполняет бассейн дольше в  $1\frac{2}{7}$  раза, получаем  $\frac{1}{x} : \frac{1}{x+14} = \frac{9}{7}$ ,

$$7x + 98 = 9x, \quad x = 49.$$

Значит, вторая труба пропускает 49 литров в минуту.

**Ответ:** 49 литров в минуту.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

21. В параллелограмме  $ABCD$  отмечена точка  $M$  – середина отрезка  $BC$ . Отрезок  $AM$  пересекается с диагональю  $BD$  в точке  $K$ . Докажите, что  $BK : BD = 1 : 3$ .

**Решение.**

Треугольники  $BKM$  и  $DKA$  подобны по двум углам ( $\angle BMA = \angle MAD$  как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $AM$ ,  $\angle BKM = \angle AKD$  как вертикальные).

$$\frac{BM}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{1}{2}, \quad DK = 2BK, \quad \text{откуда получаем } BK : BD = 1 : 3.$$

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно	3
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

22. Постройте график функции  $y = \frac{(x+2)(x^2 - 5x + 6)}{x-2}$  и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

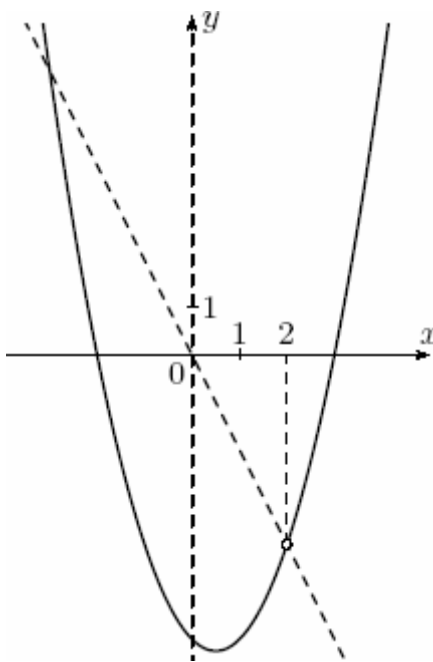
**Решение.**

$$\frac{(x+2)(x^2 - 5x + 6)}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{x-2} = (x+2)(x-3) \text{ при } x \neq 2.$$

Графиком функции является парабола с «выколотой» точкой (2; -4).

Ветви параболы направлены вверх, (0,5; -6,25) – вершина, парабола проходит через точки (-2; 0), (3; 0).

Построим график.



Прямая, проходящая через начало координат и через «выколотую» точку (см. рисунок), имеет с графиком ровно одну общую точку:  $y = -2x$ .

Ось  $Oy$  имеет с графиком функции ровно одну общую точку:  $x = 0$  (см. рисунок).

**Ответ:**  $y = -2x$ ,  $x = 0$ .

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, но указана только одна прямая (не рассмотрена ось ординат)	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

23. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $AB = BC = CD$ ,  $AM = MD$  и  $\angle ADC \neq \angle BAD$ . Найдите угол  $AMD$ .

**Решение.**

Обозначим  $\angle MAD = \angle MDA = \beta$ ,  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ .

По теореме о внешнем угле треугольника  $\angle CMD = 2\beta$ .

Через точку  $B$  проведем прямую, параллельную  $AD$ . Пусть эта прямая пересекается с продолжением диагонали  $AC$  в точке  $K$ .

Тогда  $ABKD$  – равнобокая трапеция,  $DK = AB = CD$ ,  $\angle BDK = \angle BAK = \alpha$ ,  
 $\angle KCD = \angle CKD = \angle AKD = \angle ABD = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \beta = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ .

По теореме о внешнем угле треугольника

$\angle CDM = \angle KCD - \angle CMD = (180^\circ - \alpha - 2\beta) - 2\beta = 180^\circ - \alpha - 4\beta$ . Тогда

$\angle CBD = \angle CDB = \angle CDM = 180^\circ - \alpha - 4\beta$ , а так как  $AMD$  – внешний угол треугольника

$BMC$ , то  $\angle AMB = \angle MCB + \angle CBM$ , или  $2\beta = \alpha + (180^\circ - \alpha - 4\beta)$ , откуда находим, что  $\beta = 30^\circ$ . Следовательно,  $\angle CMD = 2\beta = 60^\circ$ ,  $\angle AMD = 120^\circ$ .

**Ответ:**  $120^\circ$ .

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

### Вариант 2

1. 4
2. 10,5
3. 1
4.  $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right) \cup (1; +\infty)$
5. 2
6. 144
7. -2
8.  $r = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{F}}$
9. 432
10. (3; -3)
11. 34
12. 1650
13. 0,2
14. 2
15. 4
16. 40
17. 24
18. 24