Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}y = 9, \\ x\,\mathrm{ctg}y = 3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив первое уравнение на второе почленно, получим:

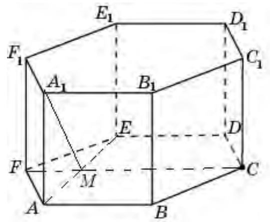
$\begin{cases} x^2 = 27, \\ tg^2 y = 3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$ Осталось учесть, что x и $tg\,y$ имеют одинаковый знак.

Ответ: $\left(-3\sqrt{3};\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $\left(3\sqrt{3};\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что x и $tg\,y$ имеют одинаковый знак.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

Решение.



Искомое расстояние равно расстоянию от прямой A_1B_1 до параллельной ей прямой FC.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1M на прямую FC. Точка M лежит в плоскости AA_1E_1, перпендикулярной прямой FC. Поэтому точка M лежит на пересечении AE и FC, а значит, является серединой AE.

$AE = \sqrt{3}$, $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника A_1AM получаем: $A_1M = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 3x - 1\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2 - 3x - 2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 2x - 1\right)^2 + \log_3 4 - 2.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(4\left(x^2 - 3x - 1\right)\cdot\left(2x^2 - 3x - 2\right)\right) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(3x^2 - 6x - 3\right)^2 \\ x^2 - 3x - 1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(x^2 - 3x - 1)(2x^2 - 3x - 2) \ge (3x^2 - 6x - 3)^2, \\ x^2 - 3x - 1 > 0, \\ 3x^2 - 6x - 3 \ne 0. \end{cases}$$

Заметим, что $3x^2 - 6x - 3 = (x^2 - 3x - 1) + (2x^2 - 3x - 2)$.

Введем обозначения $a = x^2 - 3x - 1$, $b = 2x^2 - 3x - 2$. Первое неравенство системы принимает вид $4ab \ge (a+b)^2$, откуда $a^2 - 2ab + b^2 \le 0$; $(a-b)^2 \le 0$, а это возможно, только если $a = b$.

Таким образом, $x^2 - 3x - 1 = 2x^2 - 3x - 2$, откуда $x^2 = 1$ и, значит, $x = -1$ или $x = 1$. Условиям системы удовлетворяет только $x = -1$.

Ответ: -1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \ge r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то

$$AB = \sqrt{a^2 - (R - r)^2},\ CD = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}.$$

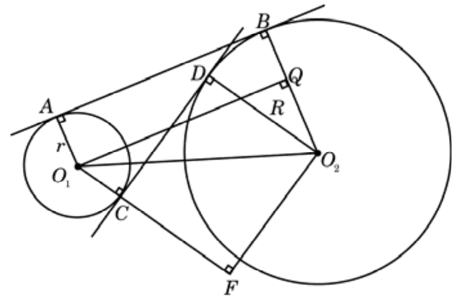


Рис. 1

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что $O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$, $O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр. Заметим, что прямая CD – общая внешняя касательная либо окружностей с центром O и O_2 (рис. 2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис. 3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

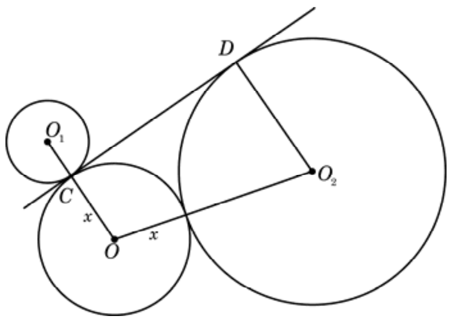


Рис. 2

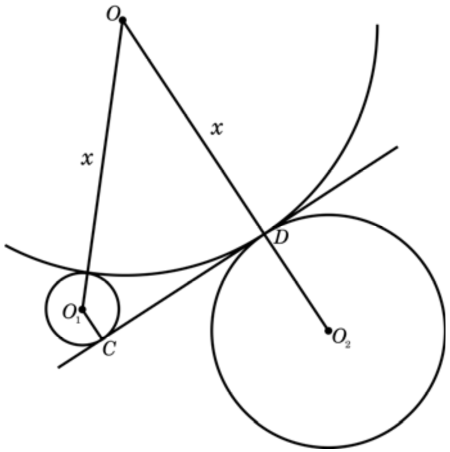


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{17^2 - (9+1)^2} = \sqrt{189}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+9)^2 - (9-x)^2} = 6\sqrt{x}$, значит, $6\sqrt{x} = \sqrt{189}$. Следовательно, $x = \dfrac{21}{4}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+1)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$, значит, $2\sqrt{x} = \sqrt{189}$. Следовательно, $x = \dfrac{189}{4}$.

Ответ: $\dfrac{21}{4}$ или $\dfrac{189}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена и непрерывна при всех $x \in \mathrm{R}$. Пусть y – одно из значений данной функции. Тогда $y(6+x^2) = x^2 + 2x - a \Leftrightarrow x^2(y-1) - 2x + a + 6y = 0$ (*). Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y = 1$ для любого a существует решение уравнения (*):

$$x^2(1-1) - 2x + a + 6\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+6}{2}.$$

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x только, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = 4 - 4(y-1)(6y+a) \geq 0 \Leftrightarrow 6y^2 + (a-6)y - a - 1 \leq 0.$$

Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} > 0, \\ \dfrac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a+6)^2+24} < 6-a, \\ \sqrt{(a+6)^2+24} < 18+a \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a < -1, \\ a > -11. \end{cases}$$

Ответ: $-11 < a < -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\begin{array}{l} a = a'^2, b = b'^2, c = c'^2; a' < b' < c'; \\ a' \geq 32; b' = a' + t, t \in N. \end{array}$

Тогда

$2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2;\ (a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$.

Значит, числа p, q – одинаковой четности, а так как $pq = 2t^2$, то

$p = 2n, q = 2m(n, m \in N) \Rightarrow t = 2v(v \in N)$.

Значит ,

$$\begin{cases} a' + 2t = \dfrac{p+q}{2} = n + m, \\ c' = \dfrac{p-q}{2} = n - m, \\ nm = 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 32, \\ c' = n - m \geq 34, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти минимум

$b' = n + m - 2v$.

Так как $n \geq 35, m \geq 1$, то $2v^2 = nm \geq 35 \Rightarrow v \geq 5$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50, n + m \geq 52, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72, n + m \geq 56, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 61$;

3) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98, n + m \geq 60, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 85$;

4) $v = 8 \Rightarrow \begin{cases} nm = 128, n + m \geq 64, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 113, b' = 50$;

5) $v \geq 9 \Rightarrow b' \geq 32 + 2v \geq 32 + 18 = 50$.

Значит, наименьшее значение $b = b'^2 = 2500$, при этом $a = 34^2, c = 62^2$.

Ответ: 2500.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} y\,\mathrm{ctg}x = -9, \\ y\,\mathrm{tg}x = -3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив второе уравнение на первое почленно, получим:

$\begin{cases} y^2 = 27, \\ \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y = \pm 3\sqrt{3}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$ Осталось учесть, что x и y имеют разные знаки.

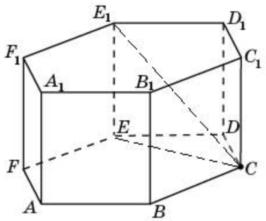
Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ 3\sqrt{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ -3\sqrt{3}\right),\ k \in Z.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $tg\,x$ и y имеют разные знаки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.

Решение.

Проведем отрезок CE_1. Он лежит в плоскости E_1EC, перпендикулярной прямой F_1E_1. Следовательно, F_1E_1 и CE_1 перпендикулярны. Значит, длина CE_1 – искомое расстояние. $EC = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника E_1EC получаем: $CE_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.



Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\log_3\left(x^2 - x - 3\right) + \log_3\left(2x^2 + x + 3\right) \ge \log_3\left(x^2 - 2\right)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_3\left(4\left(x^2 - x - 3\right)\left(2x^2 + x - 3\right)\right) \ge \log_3\left(3x^2 - 6\right)^2 \\ x^2 - x - 3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(x^2 - x - 3)(2x^2 + x - 3) \ge (3x^2 - 6)^2, \\ x^2 - x - 3 > 0, \\ 3x^2 - 6 \ne 0. \end{cases}$$

Заметим, что $3x^2 - 6 = (x^2 - x - 3) + (2x^2 + x - 3)$.

Введем обозначения $a = x^2 - x - 3$, $b = 2x^2 + x - 3$. Первое неравенство системы принимает вид $4ab \ge (a+b)^2$, откуда $a^2 - 2ab + b^2 \le 0$; $(a-b)^2 \le 0$, а это возможно, только если $a = b$.

Таким образом, $x^2 - x - 3 = 2x^2 + x - 3$, откуда $x^2 + 2x = 0$, и, значит, $x = 0$ или $x = -2$. Условиям системы удовлетворяет только $x = -2$.

Ответ: –2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \geq r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то

$$AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},\ CD = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}.$$

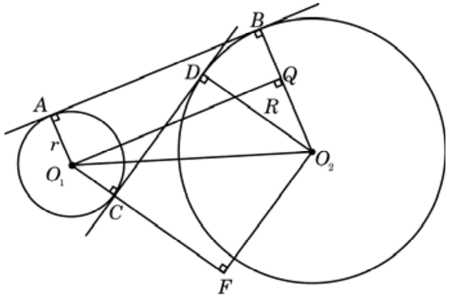


Рис. 1

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},\ O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}.$$

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр. Заметим, что прямая CD – либо общая внешняя касательная окружностей с центром O и O_2 (рис.2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис.3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

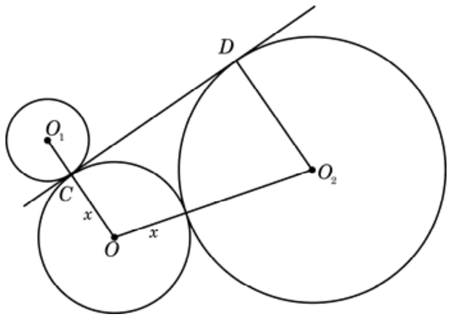


Рис. 2

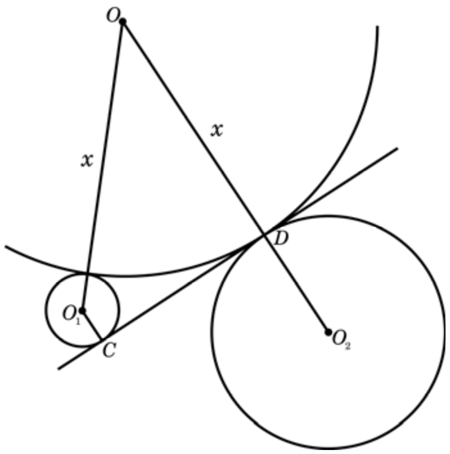


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{15^2 - (8+2)^2} = 5\sqrt{5}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+8)^2 - (8-x)^2} = 4\sqrt{2x}$, значит, $4\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \dfrac{125}{32}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+2)^2 - (2-x)^2} = 2\sqrt{2x}$, значит, $2\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \dfrac{125}{8}$.

Ответ: $\dfrac{125}{32}$ или $\dfrac{125}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена и непрерывна при всех $x \in \mathrm{R}$. Пусть y – одно из значений данной функции. Тогда $y(6 + x^2) = x^2 - 2x + a \Leftrightarrow x^2(y-1) + 2x - a + 6y = 0 (*)$. Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y = 1$ для любого a существует решение уравнения (*): $x^2(1-1) + 2x - a + 6 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a-6}{2}$.

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x, только если его дискриминант неотрицателен: $D = 4 - 4(y-1)(6y-a) \geq 0 \Leftrightarrow 6y^2 - (a+6)y + a - 1 \leq 0$. Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6 + a - \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} \leq y \leq \frac{6 + a + \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6 + a - \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} \leq y \leq \frac{6 + a + \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{6 + a - \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} > 0, \\ \dfrac{6 + a + \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-6)^2 + 24} < 6 + a, \\ \sqrt{(a-6)^2 + 24} < 18 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < 11. \end{cases}$$

Ответ: $1 < a < 11$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно *y*.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Натуральные числа *a, b, c* образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение *b*.

Решение.

Пусть $\sqrt{a} = a'$, $\sqrt{b} = b'$, $\sqrt{c} = c'$; $a' < b' < c'$;
$a' \geq 23$; $b' = a' + t, t \in K$.

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2 \Leftrightarrow (a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$. Значит числа p, q – одной четности, а так как $pq = 2t^2$, получаем: $p = 2n, q = 2m$ $(n, m \in N) \Rightarrow t = 2v$ $(v \in N)$.

Значит, $\begin{cases} a' + 2t = (p+q)/2 = n + m, \\ c' = (p-q)/2 = n - m, \\ nm = 2v^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 23, \\ c' = n - m \geq 25, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$

При этих условиях необходимо найти наименьшее значение

$$b' = n + m - 2v.$$

Так как $n \geq 26, m \geq 1$, находим, что $2v^2 = nm \geq 26$, откуда $v \geq 4$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 4 \Rightarrow \begin{cases} nm = 32, n + m \geq 39, \\ n - m \geq 25, n \geq 26, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50,\ n + m \geq 43, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow n = 50,\ n = 1,\ b' = 41;$

3) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72,\ n + m \geq 47, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow n = 72,\ m = 1, b' = 61;$

4) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98,\ n + m \geq 51, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 37$ или $b' = 85;$

5) $v \geq 8 \Rightarrow b' \geq 23 + 2v \geq 23 + 16 = 39$.

Значит наименьшее значение b равно $37^2 = 1369$, при этом $a = 23^2$, $c = 47^2$.

Ответ: 1369.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}y = 9, \\ x\,\mathrm{ctg}y = 3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив первое уравнение на второе почленно, получим:

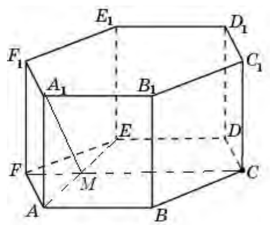
$\begin{cases} x^2 = 27, \\ tg^2 y = 3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$ Осталось учесть, что x и $tg\,y$ имеют одинаковый знак.

Ответ: $\left(-3\sqrt{3};\ -\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $\left(3\sqrt{3};\ \dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что x и $tg\,y$ имеют одинаковый знак.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

Решение.



Искомое расстояние равно расстоянию от прямой A_1B_1 до параллельной ей прямой FC.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1M на прямую FC. Точка M лежит в плоскости AA_1E_1, перпендикулярной прямой FC. Поэтому точка M лежит на пересечении AE и FC, а значит, является серединой AE.

$AE = \sqrt{3}$, $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника A_1AM получаем: $A_1M = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2-3x-2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x-1\right)^2+\log_3 4-2.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(4\left(x^2-3x-1\right)\cdot\left(2x^2-3x-2\right)\right) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(3x^2-6x-3\right)^2 \\ x^2-3x-1>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(x^2-3x-1)(2x^2-3x-2) \ge (3x^2-6x-3)^2, \\ x^2-3x-1>0, \\ 3x^2-6x-3 \ne 0. \end{cases}$$

Заметим, что $3x^2-6x-3 = (x^2-3x-1)+(2x^2-3x-2)$.

Введем обозначения $a = x^2-3x-1$, $b = 2x^2-3x-2$. Первое неравенство системы принимает вид $4ab \ge (a+b)^2$, откуда $a^2-2ab+b^2 \le 0$; $(a-b)^2 \le 0$, а это возможно, только если $a = b$.

Таким образом, $x^2-3x-1 = 2x^2-3x-2$, откуда $x^2 = 1$ и, значит, $x = -1$ или $x = 1$. Условиям системы удовлетворяет только $x = -1$.

Ответ: -1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \ge r+R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то

$$AB = \sqrt{a^2-(R-r)^2},\ CD = \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

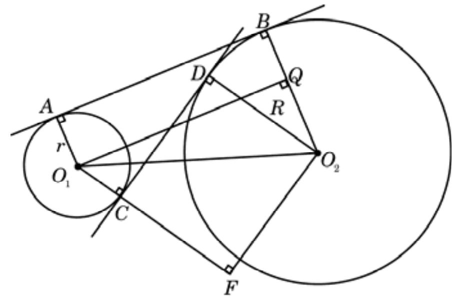


Рис. 1

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что $O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2-(R-r)^2}$, $O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр. Заметим, что прямая CD – общая внешняя касательная либо окружностей с центром O и O_2 (рис. 2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис. 3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

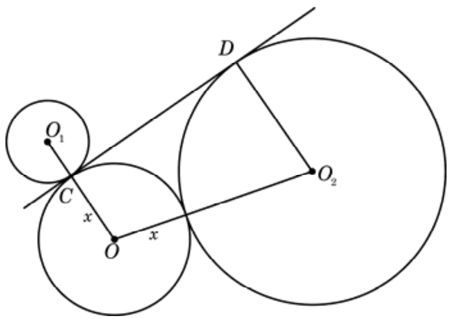


Рис. 2

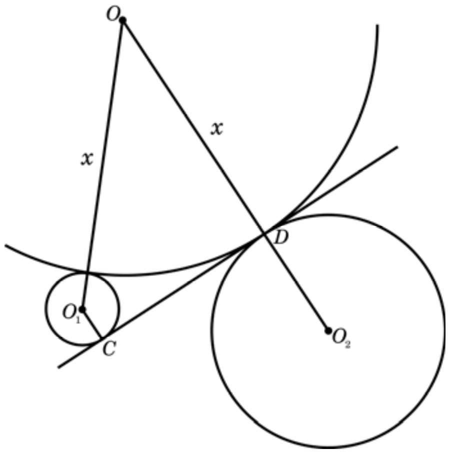


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{17^2-(9+1)^2} = \sqrt{189}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+9)^2-(9-x)^2} = 6\sqrt{x}$, значит, $6\sqrt{x} = \sqrt{189}$. Следовательно, $x = \dfrac{21}{4}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+1)^2-(1-x)^2} = 2\sqrt{x}$, значит, $2\sqrt{x} = \sqrt{189}$. Следовательно, $x = \dfrac{189}{4}$.

Ответ: $\dfrac{21}{4}$ или $\dfrac{189}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2+2x-a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена и непрерывна при всех $x \in \mathrm{R}$. Пусть y – одно из значений данной функции. Тогда $y(6+x^2) = x^2+2x-a \Leftrightarrow x^2(y-1)-2x+a+6y = 0$ (*). Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y=1$ для любого a существует решение уравнения (*):

$$x^2(1-1)-2x+a+6\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+6}{2}.$$

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x только, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = 4-4(y-1)(6y+a) \geq 0 \Leftrightarrow 6y^2+(a-6)y-a-1 \leq 0.$$

Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} > 0, \\ \dfrac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a+6)^2+24} < 6-a, \\ \sqrt{(a+6)^2+24} < 18+a \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a < -1, \\ a > -11. \end{cases}$$

Ответ: $-11 < a < -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\begin{matrix} a = a'^2, b = b'^2, c = c'^2; a' < b' < c'; \\ a' \geq 32; b' = a' + t, t \in N. \end{matrix}$

Тогда

$2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2;\ (a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$.

Значит, числа p, q – одинаковой четности, а так как $pq = 2t^2$, то

$p = 2n, q = 2m (n, m \in N) \Rightarrow t = 2v (v \in N)$.

Значит ,

$$\begin{cases} a' + 2t = \dfrac{p+q}{2} = n + m, \\ c' = \dfrac{p-q}{2} = n - m, \\ nm = 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 32, \\ c' = n - m \geq 34, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти минимум

$b' = n + m - 2v$.

Так как $n \geq 35, m \geq 1$, то $2v^2 = nm \geq 35 \Rightarrow v \geq 5$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50, n + m \geq 52, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72, n + m \geq 56, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 61$;

3) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98, n + m \geq 60, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 85$;

4) $v = 8 \Rightarrow \begin{cases} nm = 128, n + m \geq 64, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 113, b' = 50$;

5) $v \geq 9 \Rightarrow b' \geq 32 + 2v \geq 32 + 18 = 50$.

Значит, наименьшее значение $b = b'^2 = 2500$, при этом $a = 34^2, c = 62^2$.

Ответ: 2500.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} y\,ctg x = -9, \\ y\,tg x = -3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив второе уравнение на первое почленно, получим:

$\begin{cases} y^2 = 27, \\ \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y = \pm 3\sqrt{3}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$ Осталось учесть, что x и y имеют разные знаки.

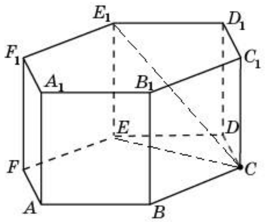
Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ 3\sqrt{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ -3\sqrt{3}\right),\ k \in Z.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $tg\,x$ и y имеют разные знаки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.

Решение.

Проведем отрезок CE_1. Он лежит в плоскости E_1EC, перпендикулярной прямой F_1E_1. Следовательно, F_1E_1 и CE_1 перпендикулярны. Значит, длина CE_1 – искомое расстояние. $EC = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника E_1EC получаем: $CE_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2.$



Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\log_3\left(x^2 - x - 3\right) + \log_3\left(2x^2 + x + 3\right) \ge \log_3\left(x^2 - 2\right)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_3\left(4\left(x^2 - x - 3\right)\left(2x^2 + x - 3\right)\right) \ge \log_3\left(3x^2 - 6\right)^2 \\ x^2 - x - 3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(x^2 - x - 3)(2x^2 + x - 3) \ge (3x^2 - 6)^2, \\ x^2 - x - 3 > 0, \\ 3x^2 - 6 \ne 0. \end{cases}$$

Заметим, что $3x^2 - 6 = (x^2 - x - 3) + (2x^2 + x - 3).$

Введем обозначения $a = x^2 - x - 3$, $b = 2x^2 + x - 3$. Первое неравенство системы принимает вид $4ab \ge (a+b)^2$, откуда $a^2 - 2ab + b^2 \le 0$; $(a-b)^2 \le 0$, а это возможно, только если $a = b$.

Таким образом, $x^2 - x - 3 = 2x^2 + x - 3$, откуда $x^2 + 2x = 0$, и, значит, $x = 0$ или $x = -2$. Условиям системы удовлетворяет только $x = -2$.

Ответ: -2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \geq r+R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то

$$AB = \sqrt{a^2-(R-r)^2},\ CD = \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

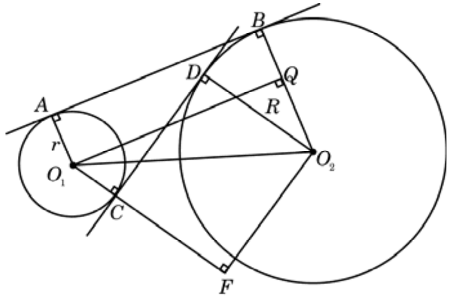


Рис. 1

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2-(R-r)^2},\ O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр. Заметим, что прямая CD – либо общая внешняя касательная окружностей с центром O и O_2 (рис.2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис.3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

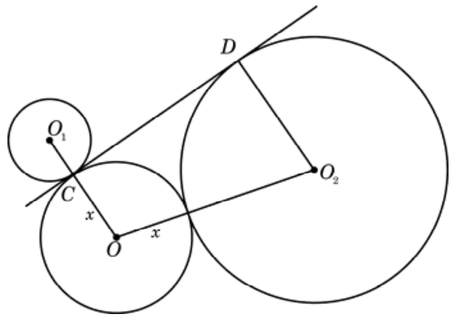


Рис. 2

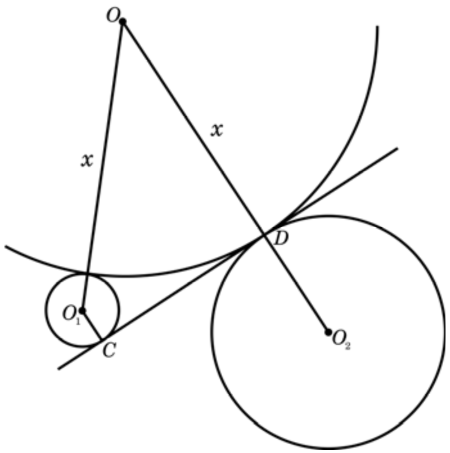


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{15^2-(8+2)^2} = 5\sqrt{5}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+8)^2-(8-x)^2} = 4\sqrt{2x}$, значит, $4\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \dfrac{125}{32}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+2)^2-(2-x)^2} = 2\sqrt{2x}$, значит, $2\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \dfrac{125}{8}$.

Ответ: $\dfrac{125}{32}$ или $\dfrac{125}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2-2x+a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена и непрерывна при всех $x \in \mathrm{R}$. Пусть y – одно из значений данной функции. Тогда $y(6+x^2) = x^2-2x+a \Leftrightarrow x^2(y-1)+2x-a+6y = 0 (*)$. Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y=1$ для любого a существует решение уравнения (*): $x^2(1-1)+2x-a+6\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a-6}{2}$.

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x, только если его дискриминант неотрицателен: $D = 4-4(y-1)(6y-a) \geq 0 \Leftrightarrow 6y^2-(a+6)y+a-1 \leq 0$. Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6+a-\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6+a+\sqrt{(a-6)^2+24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6+a-\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6+a+\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{6+a-\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} > 0, \\ \dfrac{6+a+\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-6)^2+24} < 6+a, \\ \sqrt{(a-6)^2+24} < 18-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < 11. \end{cases}$$

Ответ: $1 < a < 11$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\sqrt{a} = a'$, $\sqrt{b} = b'$, $\sqrt{c} = c'$; $a' < b' < c'$;
$a' \geq 23$; $b' = a' + t, t \in K$.

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2 \Leftrightarrow (a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$. Значит числа p, q – одной четности, а так как $pq = 2t^2$, получаем: $p = 2n, q = 2m$ $(n, m \in N) \Rightarrow t = 2v$ $(v \in N)$.

Значит, $\begin{cases} a' + 2t = (p+q)/2 = n + m, \\ c' = (p-q)/2 = n - m, \\ nm = 2v^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 23, \\ c' = n - m \geq 25, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$

При этих условиях необходимо найти наименьшее значение

$$b' = n + m - 2v.$$

Так как $n \geq 26, m \geq 1$, находим, что $2v^2 = nm \geq 26$, откуда $v \geq 4$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 4 \Rightarrow \begin{cases} nm = 32, n + m \geq 39, \\ n - m \geq 25, n \geq 26, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50,\ n + m \geq 43, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow n = 50,\ n = 1,\ b' = 41;$

3) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72,\ n + m \geq 47, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow n = 72,\ m = 1, b' = 61;$

4) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98,\ n + m \geq 51, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 37$ или $b' = 85;$

5) $v \geq 8 \Rightarrow b' \geq 23 + 2v \geq 23 + 16 = 39$.

Значит наименьшее значение b равно $37^2 = 1369$, при этом $a = 23^2$, $c = 47^2$.

Ответ: 1369.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = y, \\ \cos x^2 = -\sin y. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $y \geq 0$, а второе уравнение принимает вид $\cos y = -\sin y$, откуда $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $y \geq 0$, получаем: $k = 1, 2, \ldots$

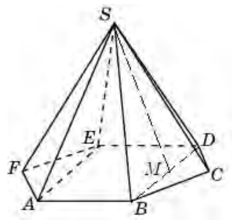
Тогда $x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k}$.

Ответ: $\left(-\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k};\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\right), \left(\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k};\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right),\ k = 1, 2, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $y \geq 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

Решение.



Искомый угол равен углу между прямыми SB и BD, поскольку $BD || AE$.
В равнобедренном треугольнике BSD проведем высоту и медиану SM.

$BM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, из прямоугольного треугольника SMB получаем:

$\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_4(2^x - 1)}{x - 1} \leq 1$.

Решение.

Пусть $y = 2^x - 1$. Тогда $x = \log_2(y + 1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_4 y}{\log_2(y+1) - 1} \leq 1; \quad \frac{\log_4 y - \log_2(y+1) + 1}{\log_2(y+1) - 1} \leq 0; \quad \frac{\log_4 \frac{4y}{(y+1)^2}}{\log_2 \frac{y+1}{2}} \leq 0.$$

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{4y}{(y+1)^2} - 1}{\frac{y+1}{2} - 1} \leq 0, \\ y + 1 > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{y^2 - 2y + 1}{(y+1)^2(y-1)} \leq 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2}{y-1} \geq 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad y > 1.$$

Сделаем обратную замену: $2^x - 1 > 1$, откуда $2^x > 2$.

Значит, $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 36$ и $BC = 27$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 18. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = ODctg\frac{\alpha}{2} = 3x.$$

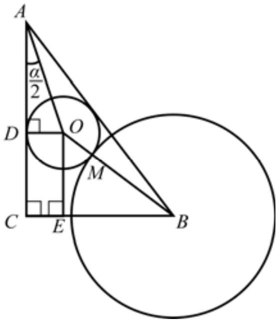


Рис. 1

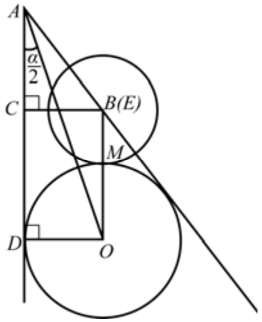


Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 18 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 36 - 3x,\ BE = BC - CE = BC - OD = 27 - x,$$

причем $AD < AC$, т. е. $3x < 36$, $x < 12$.

По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$(18+x)^2 = (36-3x)^2 + (27-x)^2,\quad x^2 - 34x + 189 = 0,\quad x < 12,$$

откуда находим, что $x = 7$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому

$$OE = CD = AD - AC = 3x - 36,$$

причем $AD > AC$, т. е. $x > 12$. Тогда

$$(18+x)^2 = (3x-36)^2 + (27-x)^2;\ x^2 - 34x + 189 = 0;\ x > 12,$$

откуда находим, что $x = 27$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: 7 или 27.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^{x+3a} - 3^{x^2-4x+7a} = x^2 - 6x + a$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем уравнение: $2x + 9^{x+3a} = x^2 - 4x + a + 3^{x^2-4x+7a}$;

Сделаем замену: $2y = x^2 - 4x + a$.

Уравнение принимает вид $2x + 9^{x+3a} = 2y + 3^{2y+6a}$, откуда $2x + 9^{x+3a} = 2y + 9^{y+3a}$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + 9^{t+3a}$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Функция $f(t)$ определена при всех t и монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $2x = x^2 - 4x + a$; $x^2 - 6x + a = 0$.

Уравнение имеет единственное решение, если дискриминант его равен нулю:

$6^2 - 4a = 0$; $a = 9$.

Ответ: 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наименьшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит два пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x-2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакетике $n-5$. По условию задачи получаем: $2nx = 3(n-5)(x-2)$, откуда

$$n = \frac{15x-30}{x-6} = 15 + \frac{60}{x-6} = 15\left(1 + \frac{4}{x-6}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{4}{x-6} > -1$, откуда $x > 6$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-6$ – натуральный делитель числа 60.

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 594.

Комментарий. Перебор делителей можно сократить. Заметим, что количество шариков равно

$$2nx = 2x\left(15 + \frac{60}{x-6}\right) = 30\left(x - 6 + \frac{24}{x-6}\right) + 300 \geq 30 \cdot 2\sqrt{(x-6) \cdot \frac{24}{x-6}} + 300.$$

Последнее неравенство следует из неравенства о средних: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для неотрицательных чисел.

Значит, количество шариков не меньше, чем $120\sqrt{6} + 300 > 590$.

Число шариков кратно шести. Значит, наименьшее возможное число 594.

Это значение достигается, если $x = 11$ и $n = 27$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = x, \\ \sin y^2 = \cos x. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $x \ge 0$, а второе уравнение принимает вид $\sin x = \cos x$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $x \ge 0$, получаем: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда $y = \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \pi k}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; -\sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \pi k}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \pi k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

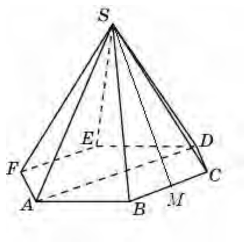
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $x \ge 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

Решение.

Прямая AD параллельна прямой BC. Следовательно, искомый угол SBC. В равнобедренном треугольнике SBC проведем медиану и высоту SM.

$BM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}$. Из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{1}{4}$.



Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_3(3^x - 1)}{x - 1} \ge 1$.

Решение.

Пусть $y = 3^x - 1$. Тогда $x = \log_3(y+1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_3 y}{\log_3(y+1) - 1} \ge 1; \quad \frac{\log_3 y - \log_3(y+1) + 1}{\log_3(y+1) - 1} \ge 0; \quad \frac{\log_3\frac{3y}{y+1}}{\log_3\frac{y+1}{3}} \ge 0.$$

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3y}{y+1} - 1}{\frac{y+1}{3} - 1} \ge 0, \\ y + 1 > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2y - 1}{(y+1)(y-2)} \ge 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2y-1}{y-2} \ge 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Решение системы: $0 < y \le \dfrac{1}{2}$, $y > 2$.

Сделаем обратную замену: $0 < 3^x - 1 \le \dfrac{1}{2}$ или $3^x - 1 > 2$, откуда

$1 < 3^x \le \dfrac{3}{2}$ или $3^x > 3$. Значит, $0 < x \le 1 - \log_3 2$ или $x > 1$.

Ответ: $(0; 1 - \log_3 2]$, $(1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

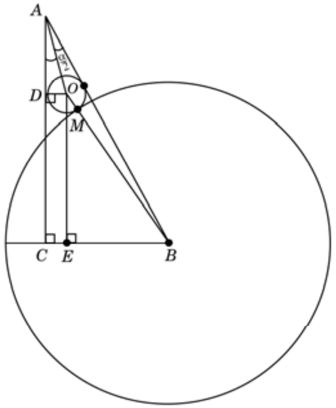
$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}, \ \cos\alpha = \frac{12}{13}, \ \sin\alpha = \frac{5}{13}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD ctg\frac{\alpha}{2} = 5x.$$



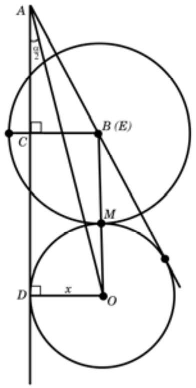


Рис. 1 Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит,

$BO = BM + MO = 8 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x,\ BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x,$$

причем $AD < AC$, т. е. $5x < 12, x < \dfrac{12}{5}$. По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$(8+x)^2 = (12-5x)^2 + (5-x)^2,\ 25x^2 - 146x + 105 = 0, x < \frac{12}{5},$$

откуда находим, что $x = \dfrac{21}{25}$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому

$$OE = CD = AD - AC = 5x - 12,$$

причем $AD > AC$, т. е. $x > \dfrac{12}{5}$. Тогда

$$(8+x)^2 = (5x-12)^2 + (5-x)^2;\ 25x^2 - 146x + 105 = 0;\quad x > \frac{12}{5},$$

откуда находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: $\dfrac{21}{25}$ или 5.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

Решение.

Преобразуем уравнение: $3x + 64^{x+a} = x^2 - 5x + a + 4^{x^2-5x+4a}$;

Сделаем замену: $3y = x^2 - 5x + a$.

Уравнение принимает вид $3x + 64^{x+a} = 3y + 4^{3y+3a}$, откуда $3x + 64^{x+a} = 3y + 64^{y+a}$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 3t + 64^{t+a}$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Функция $f(t)$ определена при всех t и монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $3x = x^2 - 5x + a$; $x^2 - 8x + a = 0$.

Уравнение не имеет действительных решений, если дискриминант его отрицателен:

$8^2 - 4a < 0$; $a > 16$.

Ответ: $a > 16$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наименьшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем: $3nx = 2(n+3)(x+2)$, откуда

$$n = \frac{6x+12}{x-4} = 6 + \frac{36}{x-4} = 6\left(1 + \frac{6}{x-4}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{6}{x-4} > -1$, откуда $x > 4$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ – натуральный делитель числа 36.

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 360.

Комментарий. Перебор всех делителей можно сократить: количество шариков равно

$$3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x - 4 + \frac{24}{x-4}\right) + 180 \geq 18 \cdot 2\sqrt{(x-4)\cdot\frac{24}{(x-4)}} + 180.$$

(последнее неравенство следует из неравенства о средних $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для неотрицательных чисел). Значит, шариков не меньше, чем

$$36 \cdot 2\sqrt{6} + 180 = 72\sqrt{6} + 180 > 354.$$

Число шариков кратно шести. Поэтому наименьшее возможное значение 360. Это значение достигается, если $x = 10$ и $n = 12$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = y, \\ \cos x^2 = -\sin y. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $y \geq 0$, а второе уравнение принимает вид $\cos y = -\sin y$, откуда $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $y \geq 0$, получаем: $k = 1, 2, ...$

Тогда $x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k}$.

Ответ: $\left(-\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k};\, -\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\right), \left(\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k};\, -\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right),\ k = 1, 2, ...$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $y \geq 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

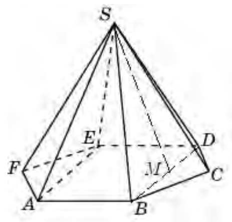
C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

Решение.

Искомый угол равен углу между прямыми SB и BD, поскольку $BD || AE$.
В равнобедренном треугольнике BSD проведем высоту и медиану SM.

$BM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, из прямоугольного треугольника SMB получаем:

$\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_4(2^x - 1)}{x - 1} \leq 1$.

Решение.

Пусть $y = 2^x - 1$. Тогда $x = \log_2(y + 1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_4 y}{\log_2(y+1) - 1} \leq 1;\quad \frac{\log_4 y - \log_2(y+1) + 1}{\log_2(y+1) - 1} \leq 0;\quad \frac{\log_4 \frac{4y}{(y+1)^2}}{\log_2 \frac{y+1}{2}} \leq 0.$$

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{4y}{(y+1)^2} - 1}{\dfrac{y+1}{2} - 1} \leq 0, \\ y + 1 > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{y^2 - 2y + 1}{(y+1)^2(y-1)} \leq 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2}{y-1} \geq 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad y > 1.$$

Сделаем обратную замену: $2^x - 1 > 1$, откуда $2^x > 2$.

Значит, $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 36$ и $BC = 27$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 18. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4},\quad \cos\alpha = \frac{4}{5},\quad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = ODctg\frac{\alpha}{2} = 3x.$$

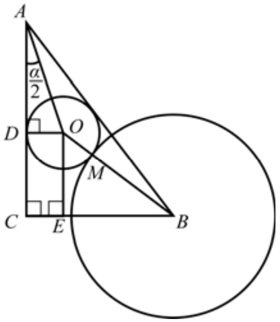


Рис. 1

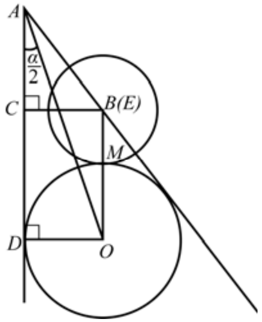


Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 18 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 36 - 3x,\ BE = BC - CE = BC - OD = 27 - x,$$

причем $AD < AC$, т. е. $3x < 36$, $x < 12$.

По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$(18+x)^2 = (36-3x)^2 + (27-x)^2,\quad x^2 - 34x + 189 = 0,\quad x < 12,$$

откуда находим, что $x = 7$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому

$$OE = CD = AD - AC = 3x - 36,$$

причем $AD > AC$, т. е. $x > 12$. Тогда

$$(18+x)^2 = (3x-36)^2 + (27-x)^2;\ x^2 - 34x + 189 = 0;\ x > 12,$$

откуда находим, что $x = 27$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: 7 или 27.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^{x+3a} - 3^{x^2-4x+7a} = x^2 - 6x + a$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем уравнение: $2x + 9^{x+3a} = x^2 - 4x + a + 3^{x^2-4x+7a}$;

Сделаем замену: $2y = x^2 - 4x + a$.

Уравнение принимает вид $2x + 9^{x+3a} = 2y + 3^{2y+6a}$, откуда $2x + 9^{x+3a} = 2y + 9^{y+3a}$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + 9^{t+3a}$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Функция $f(t)$ определена при всех t и монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $2x = x^2 - 4x + a$; $x^2 - 6x + a = 0$.

Уравнение имеет единственное решение, если дискриминант его равен нулю:

$6^2 - 4a = 0$; $a = 9$.

Ответ: 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наименьшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит два пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x-2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакетике $n-5$. По условию задачи получаем: $2nx = 3(n-5)(x-2)$, откуда

$$n = \frac{15x-30}{x-6} = 15 + \frac{60}{x-6} = 15\left(1 + \frac{4}{x-6}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{4}{x-6} > -1$, откуда $x > 6$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-6$ – натуральный делитель числа 60.

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 594.

Комментарий. Перебор делителей можно сократить. Заметим, что количество шариков равно

$$2nx = 2x\left(15 + \frac{60}{x-6}\right) = 30\left(x - 6 + \frac{24}{x-6}\right) + 300 \geq 30 \cdot 2\sqrt{(x-6) \cdot \frac{24}{x-6}} + 300.$$

Последнее неравенство следует из неравенства о средних: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для неотрицательных чисел.

Значит, количество шариков не меньше, чем $120\sqrt{6} + 300 > 590$.

Число шариков кратно шести. Значит, наименьшее возможное число 594.

Это значение достигается, если $x = 11$ и $n = 27$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = x, \\ \sin y^2 = \cos x. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $x \ge 0$, а второе уравнение принимает вид $\sin x = \cos x$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $x \ge 0$, получаем: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда $y = \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \pi k}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; -\sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \pi k}\right), \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \pi k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

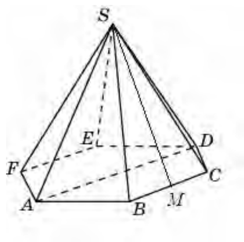
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $x \ge 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

Решение.

Прямая AD параллельна прямой BC. Следовательно, искомый угол SBC. В равнобедренном треугольнике SBC проведем медиану и высоту SM.

$BM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}$. Из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{1}{4}$.



Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_3(3^x - 1)}{x - 1} \ge 1$.

Решение.

Пусть $y = 3^x - 1$. Тогда $x = \log_3(y + 1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_3 y}{\log_3(y+1) - 1} \ge 1; \quad \frac{\log_3 y - \log_3(y+1) + 1}{\log_3(y+1) - 1} \ge 0; \quad \frac{\log_3 \frac{3y}{y+1}}{\log_3 \frac{y+1}{3}} \ge 0.$$

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3y}{y+1} - 1}{\frac{y+1}{3} - 1} \ge 0, \\ y + 1 > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2y - 1}{(y+1)(y-2)} \ge 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2y-1}{y-2} \ge 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Решение системы: $0 < y \le \dfrac{1}{2}$, $y > 2$.

Сделаем обратную замену: $0 < 3^x - 1 \le \dfrac{1}{2}$ или $3^x - 1 > 2$, откуда

$1 < 3^x \le \dfrac{3}{2}$ или $3^x > 3$. Значит, $0 < x \le 1 - \log_3 2$ или $x > 1$.

Ответ: $(0; 1 - \log_3 2]$, $(1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

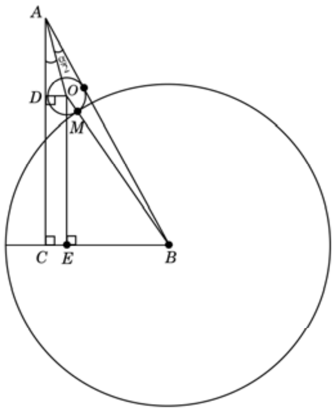
$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}, \ \cos\alpha = \frac{12}{13}, \ \sin\alpha = \frac{5}{13}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD ctg\frac{\alpha}{2} = 5x.$$



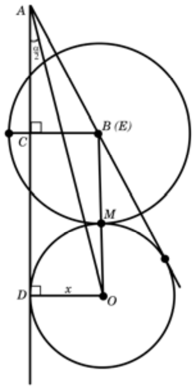


Рис. 1 Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит,

$BO = BM + MO = 8 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x,\ BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x,$$

причем $AD < AC$, т. е. $5x < 12, x < \frac{12}{5}$. По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$(8+x)^2 = (12-5x)^2 + (5-x)^2,\ 25x^2 - 146x + 105 = 0, x < \frac{12}{5},$$

откуда находим, что $x = \frac{21}{25}$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому

$$OE = CD = AD - AC = 5x - 12,$$

причем $AD > AC$, т. е. $x > \frac{12}{5}$. Тогда

$$(8+x)^2 = (5x-12)^2 + (5-x)^2;\ 25x^2 - 146x + 105 = 0;\quad x > \frac{12}{5},$$

откуда находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: $\frac{21}{25}$ или 5.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

Решение.

Преобразуем уравнение: $3x + 64^{x+a} = x^2 - 5x + a + 4^{x^2-5x+4a}$;

Сделаем замену: $3y = x^2 - 5x + a$.

Уравнение принимает вид $3x + 64^{x+a} = 3y + 4^{3y+3a}$, откуда $3x + 64^{x+a} = 3y + 64^{y+a}$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 3t + 64^{t+a}$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Функция $f(t)$ определена при всех t и монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $3x = x^2 - 5x + a$; $x^2 - 8x + a = 0$.

Уравнение не имеет действительных решений, если дискриминант его отрицателен:
$8^2 - 4a < 0$; $a > 16$.

Ответ: $a > 16$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наименьшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем: $3nx = 2(n+3)(x+2)$, откуда

$$n = \frac{6x+12}{x-4} = 6 + \frac{36}{x-4} = 6\left(1 + \frac{6}{x-4}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{6}{x-4} > -1$, откуда $x > 4$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ – натуральный делитель числа 36.

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 360.

Комментарий. Перебор всех делителей можно сократить: количество шариков равно

$$3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x-4+\frac{24}{x-4}\right) + 180 \geq 18 \cdot 2\sqrt{(x-4)\cdot\frac{24}{(x-4)}} + 180.$$

(последнее неравенство следует из неравенства о средних $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для неотрицательных чисел). Значит, шариков не меньше, чем

$$36 \cdot 2\sqrt{6} + 180 = 72\sqrt{6} + 180 > 354.$$

Число шариков кратно шести. Поэтому наименьшее возможное значение 360. Это значение достигается, если $x = 10$ и $n = 12$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0