Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $x^3 = 4x^2 + 5x$.

Решение. Перенесем все члены в левую часть и вынесем x за скобки:

$x(x^2 - 4x - 5) = 0$, откуда $x = 0$ или $x^2 - 4x - 5 = 0$.

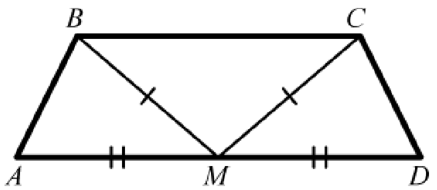
Решая квадратное уравнение, находим: $x = -1$ или $x = 5$.

Ответ: −1, 0, 5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

C2 Середина M основания AD трапеции $ABCD$ равноудалена от концов другого основания. Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

Доказательство. Треугольник BMC равнобедренный. Поэтому $\angle CBM = \angle BCM$. По свойству параллельных прямых $\angle CBM = \angle BMA$ и $\angle BCM = \angle CMD$. Следовательно, $\angle BMA = \angle CMD$. Значит, треугольники BMA и CMD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AB=CD$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	2
Доказательство в целом верное, но не обосновано равенство треугольников	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

C3 Постройте график функции

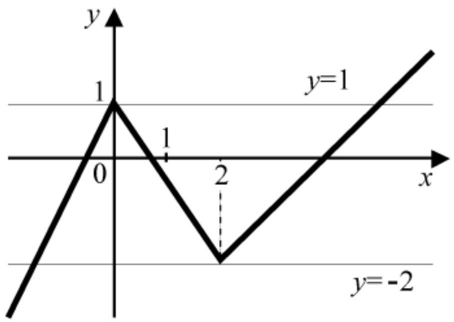
$$y = \begin{cases} 2x+1, \text{если } x < 0, \\ 1-1{,}5x, \text{если } 0 \le x < 2, \\ x-4, \text{если } x \ge 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. График функции состоит из двух лучей и отрезка.

На рисунке видно, что график имеет ровно две общие точки с горизонтальными прямыми y=−2 и y=1.

Ответ: 1;−2.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения c, при которых прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки	3
График построен правильно, но указаны значения c не указаны, указаны неверно или не все.	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB=16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть CH – высота треугольника, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, Q – центр этой окружности. Так как $AH=8$, то $AC=10$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p=18$, а его площадь $S=48$. Поэтому $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{8}{3}$. Обозначим $\angle QAH$ буквой α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{QH}{AH}=\dfrac{1}{3}$, а $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Отсюда $AQ=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{8}{3}\sqrt{10}$.

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 3.

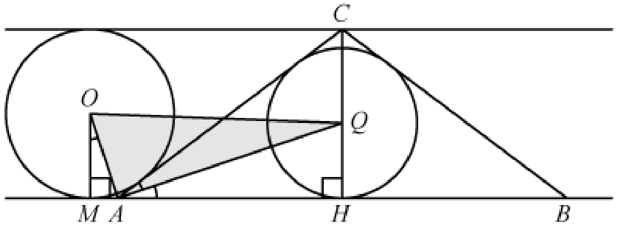


Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO – биссектриса угла MAC. Тогда

$$\angle OAQ=\frac{1}{2}\left(\angle CAB+\angle CAM\right)=90^\circ,\ \angle OAM=90^\circ-\angle QAH=90^\circ-\alpha,$$

$$\angle AOM=\alpha,\qquad AO=\frac{OM}{\cos\alpha}=\sqrt{10}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ=\sqrt{AQ^2+AO^2}=\sqrt{\frac{640}{9}+10}=\frac{\sqrt{730}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 2).

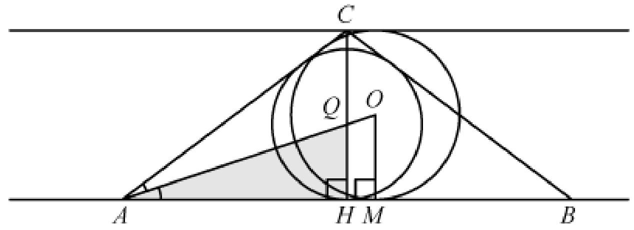


Рис. 2.

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом $\dfrac{OM}{QH}=3:\dfrac{8}{3}=\dfrac{9}{8}$, поэтому

$$AO=\frac{9}{8}AQ=\frac{9}{8}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{10}=3\sqrt{10}.$$

Следовательно,

$$OQ=AO-AQ=3\sqrt{10}-\frac{8}{3}\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{730}}{3}$ или $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $x^3 = 6x^2 + 7x$.

Решение.

Перенесем все члены уравнения в левую часть и вынесем x за скобки:

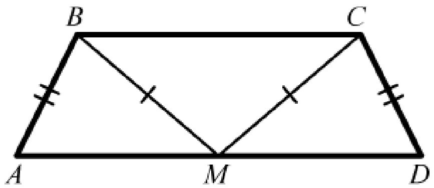
$$x\left(x^2 - 6x - 7\right) = 0, \text{ откуда } x = 0 \text{ или } x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим: $x = -1$ или $x = 7$.

Ответ: -1, 0, 7.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

C2 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Точка M лежит на основании AD и равноудалена от концов другого основания. Докажите, что M середина основания AD.



Доказательство. Треугольник BMC равнобедренный. Поэтому $\angle CBM = \angle BCM$. В равнобедренной трапеции $\angle ABC = \angle DCB$. Отсюда следует, что $\angle ABM = \angle DCM$. Значит, треугольники BMA и CMD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AM=MD$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	2
Доказательство в целом верное, но не обосновано равенство треугольников	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

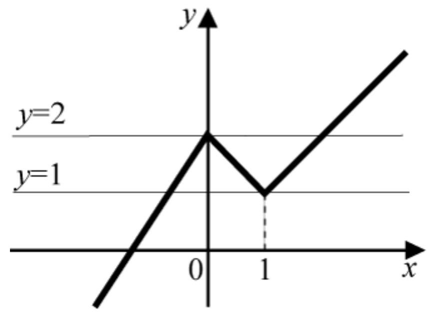
C3 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 1{,}5x + 2, & \text{если } x < 0, \\ 2 - x, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ x, & \text{если } x \ge 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. График функции состоит из двух лучей и отрезка.

На рисунке видно, что график имеет ровно две общие точки с горизонтальными прямыми $y = 2$ и $y = 1$.



Ответ: 2, 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения c, при которых прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки	3
График построен правильно, но значения c не указаны, указаны неверно или не все.	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть CH – высота треугольника, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, Q – центр этой окружности. $AH = 5$, поэтому $AC = 13$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p = 18$, а его площадь $S = 60$. Поэтому $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{10}{3}$. Обозначим $\angle QAH$ буквой α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{QH}{AH} = \dfrac{2}{3}$, а $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Отсюда $AQ = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{3}\sqrt{13}$.

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 6.

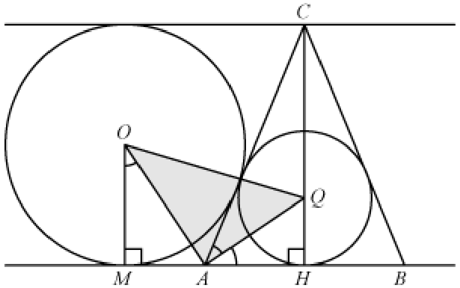


Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO – биссектриса угла MAC. Тогда

$$\angle OAQ = \frac{1}{2}\left(\angle CAB + \angle CAM\right) = 90^\circ, \qquad \angle OAM = 90^\circ - \angle QAH = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle AOM = \alpha, \qquad AO = \frac{OM}{\cos\alpha} = 2\sqrt{13}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ = \sqrt{AQ^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{325}{9} + 52} = \frac{\sqrt{793}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 2).

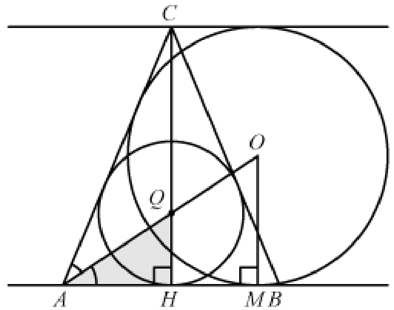


Рис. 2.

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом $\dfrac{OM}{QH} = 6 : \dfrac{10}{3} = \dfrac{9}{5}$, поэтому

$$AO = \frac{9}{5}AQ = \frac{9}{5}\cdot\frac{5}{3}\sqrt{13} = 3\sqrt{13}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{13} - \frac{5}{3}\sqrt{13} = \frac{4}{3}\sqrt{13}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{793}}{3}$ или $\dfrac{4}{3}\sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3