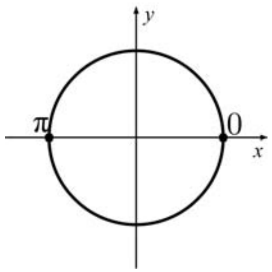
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{\sin x - \sin 2x}{\sqrt{2\cos x - 1}} = 0$.

Решение:

Левая часть имеет смысл при $2\cos x - 1 > 0$, то есть при $\cos x > \dfrac{1}{2}$.



Решим уравнение $\sin x - \sin 2x = 0$. Получаем:

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0;\ \ \sin x(1 - 2\cos x) = 0.$$

Учитывая, что $1 - 2\cos x \neq 0$, находим: $\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$.

Учитывая условие $\cos x > \dfrac{1}{2}$, получаем: $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

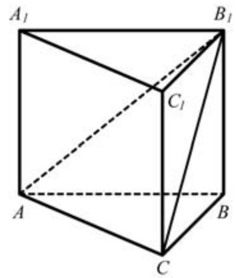
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Ответ содержит лишние решения, поскольку отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

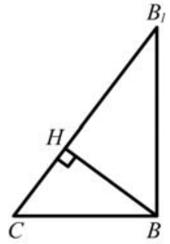
С2 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. $BC = 3$. Высота призмы равна 4. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1.

Решение:

Поскольку $AC \perp BC$ и $AC \perp BB_1$, отрезок AC перпендикулярен плоскости BCB_1. Следовательно, плоскости BCB_1 и ACB_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки B до плоскости ACB_1 равно высоте BH прямоугольного треугольника BCB_1.

$$BH = \frac{BB_1 \cdot BC}{B_1C}.\quad B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = 5.$$





Следовательно, $BH = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = 2,4$.

Ответ: 2,4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство $2\log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} x^2 + \log_{|x|}\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right) \leq 4$.

Решение:

Разделим обе части неравенства на 2:

$$\log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} x^2 + \frac{1}{2}\log_{|x|}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \leq 2, \text{ откуда } \log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} x^2 + \log_{x^2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \leq 2.$$

Левая часть неравенства имеет смысл при

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 2, \\ x \neq 0, \\ x^2 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Сделаем замену: $y = \log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} x^2$. Получаем:

$$y+\frac{1}{y}\le 2;\quad \frac{y^2-2y+1}{y}\le 0;\quad y=1 \text{ или } y<0.$$

<u>1 случай.</u> $\log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} x^2 = 1$. Получаем: $2x^2 = x+1$; $x=1$ или $x=-\frac{1}{2}$.

Найденным условиям удовлетворяет только $x=-\frac{1}{2}$.

<u>2 случай.</u> $\log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} x^2 < 0$. Тогда $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-1\right)\left(x^2-1\right)<0$; $(x-1)^2(x+1)<0$.

Учитывая, что $x>-1$, находим, что в этом случае решений нет.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит обоснованный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам относительно x или относительно логарифма. Однако в ответ включено постороннее значение 1, либо допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу. Случай $y<0$ рассмотрен или доказано, что он невозможен.	2
Получено значение $-\frac{1}{2}$, но случай $y<0$ не рассмотрен или не доказано, что он невозможен ИЛИ в ответ включены посторонние решения, ошибочно полученные из случая $y<0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5 : 8, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Решение:

Пусть AD – высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O – центр вписанной окружности, P – точка ее касания с боковой стороной AB. Положим $AP=8x$, $BP=5x$. Тогда $AB=AP+BP=13x$, $BD=BP=5x$.

По теореме Пифагора $AB^2-BD^2=AD^2$;

$$(13x)^2-(5x)^2=24^2;\quad (12x)^2=24^2,$$

откуда $x=2$. Значит,

$$AP=8x=16,\quad BD=5x=10,\quad AB=13x=26.$$

Обозначим $\angle BAD=\alpha$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что

$$tg\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 1), а также основания BC. Тогда D – точка касания, поэтому

$$BF=BD=10,\quad AF=AB+BF=AB+BD=26+10=36.$$

Следовательно,

$$r_1=O_1F=AFtg\alpha=36\cdot\frac{5}{12}=15.$$

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD – биссектрисы смежных углов BAK и CAB, значит, $\angle DAO_2=90°$. Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2=O_2Q=AD=24$.

Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB, также равен 24.

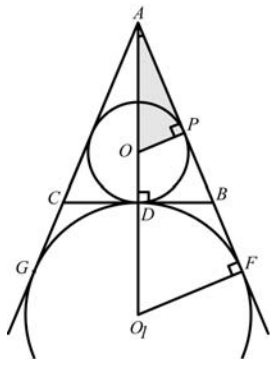


Рис.1

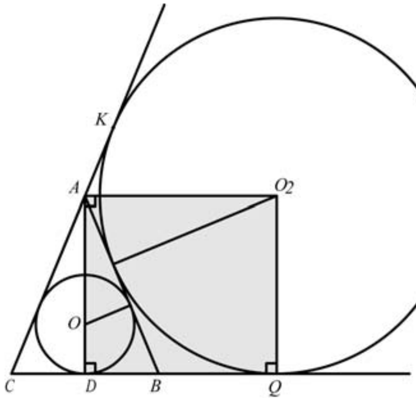


Рис.2

Ответ: 15 или 24.

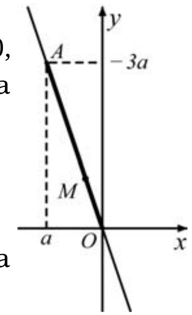
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2}=|a|\sqrt{10}, \\ y=ax+a^2-9 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение:



Если $a=0$, то система, очевидно не имеет решений. Пусть $a \neq 0$, O – начало координат, точка M имеет координаты $(x; y)$, а точка A имеет координаты $(a; -3a)$. Тогда

$$OM=\sqrt{x^2+y^2},\ MA=\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2} \text{ и } OA=|a|\sqrt{10}.$$

Таким образом, $OM+MA=OA$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке OA.

Отрезок OA имеет более одной общей точки с прямой $y=ax+a^2-9$, только если этот отрезок лежит на прямой. Таким образом, координаты точек A и O должны удовлетворять второму уравнению системы:

$$\begin{cases} -3a=a^2+a^2-9, \\ 0=a^2-9; \end{cases} \quad \begin{cases} -3a=a^2, \\ a^2=9; \end{cases} \quad a=-3.$$

Ответ: -3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу.	3
Обоснованно найдено значение -3, однако в ответ включены посторонние значения, полученные за счет логической ошибки в рассуждениях.	2
Решение содержит - или верное описание взаимного расположения отрезка и прямой. - или верный переход к уравнениям относительно a или с параметром a относительно одной из переменных, возможно без ограничений на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Гидролог вводит в компьютер измерения температуры забортной воды. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За время наблюдений температура наблюдалась выше $10^{\circ}C$, но ниже $17^{\circ}C$. Всего гидролог ввел 32 измерения, но из-за усталости, качки судна и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой гидролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую.

После упорядочивания данных получился ряд из 32 чисел, начинающийся числами 12,2; 12,8…

Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся равно 68,8. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 13,7.

Определите, в каких числах и какие ошибки допустил гидролог.

Решение:

Пусть ряд выглядит так: 12,2; 12,8; x_3; x_4; ... x_{30}; a; b. Очевидно, что в результате упорядочивания два числа с ошибками оказались последними. Это числа a и b. Тогда

$$\frac{x_3 + x_4 + ... + x_{30} + a + b}{30} - \frac{12,2 + 12,8 + x_3 + x_4 + ... + x_{30}}{30} = 68,8 – 13,7 = 55,1,$$

откуда $\frac{a+b}{30} - \frac{12,2+12,8}{30} = 55,1$ и, значит, $a + b = 1653 + 25 = 1678$.

Обозначим неизвестные цифры в числах a и b буквами: $a = \overline{1mp}$ и $b = \overline{1n0q}$.

Если $p + q = 8$, то $m + 0 = 7$. Тогда $a \geq 170$, что невозможно, поскольку все измерения показывали ниже 17°. Следовательно, $p + q = 18$, откуда $p = q = 9$.

Тогда $m = 6$ и $n = 5$. Получаем числа $a = 169$ и $b = 1509$.

Ответ: гидролог ошибся в числе 16,9, пропустив запятую, и в числе 15,9, поставив вместо запятой ноль.

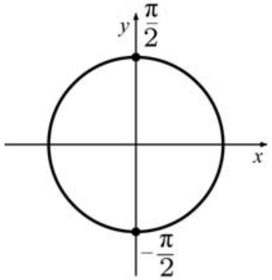
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные значения.	4
Найдена сумма ошибочных чисел, но в вычислениях допущена ошибка, возможно приведшая к неверному ответу.	3
Найдены верные решения, однако доказательство единственности отсутствует или ошибочно.	2
Найдено несколько пар чисел, среди которых есть верное решение, отбор не произведен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0.$

Решение:

Левая часть имеет смысл при $2\sin x - 1 > 0$, то есть при $\sin x > \dfrac{1}{2}$.



Решим уравнение $\cos x - \sin 2x = 0$. Получаем:

$$\cos x - 2\sin x\cos x = 0;\ \cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

Учитывая, что $1 - 2\sin x \neq 0$, находим: $\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Учитывая условие $\sin x > \dfrac{1}{2}$, получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

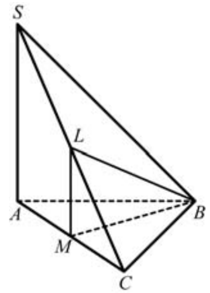
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю числитель левой части исходного уравнения. Отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

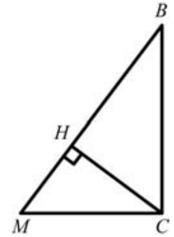
С2 Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4$, $AC = 6$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние от точки C до плоскости BLM, где L, M – середины ребер SC и AC соответственно.

Решение:

$SA \perp ABC$ и ML – средняя линия треугольника ACS, поэтому $ML \perp ABC$. Следовательно, плоскости BLM и ABC перпендикулярны. Значит, расстояние от точки C до плоскости BLM равно высоте CH прямоугольного треугольника BCM.

$$CH = \frac{BC \cdot CM}{BM}. \quad CM = 3; \quad BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = 5.$$





Следовательно, $CH = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = 2,4.$

Ответ: 2,4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство $2\log_{1-\frac{1}{2}x}\left(x-1\right)^2 + \log_{|x-1|}\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right) \le 4.$

Решение:

Разделим обе части неравенства на 2:

$$\log_{1-\frac{1}{2}x}(x-1)^2 + \frac{1}{2}\log_{|x-1|}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) \le 2, \text{ откуда } \log_{1-\frac{1}{2}x}(x-1)^2 + \log_{(x-1)^2}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) \le 2.$$

Левая часть неравенства имеет смысл при

$$\begin{cases} 2-x>0,\\ 2-x\ne 2,\\ x\ne 1,\\ (x-1)^2\ne 1;\end{cases}\qquad \begin{cases} x<2,\\ x\ne 0,\\ x\ne 1.\end{cases}$$

Сделаем замену: $y=\log_{1-\frac{1}{2}x}(x-1)^2$. Получаем:

$$y+\frac{1}{y}\le 2;\quad \frac{y^2-2y+1}{y}\le 0;\quad y=1 \text{ или } y<0.$$

1 случай. $\log_{1-\frac{1}{2}x}(x-1)^2=1$. Получаем:

$$2(x-1)^2=2-x;\quad 2x^2-3x=0;\quad x=\frac{3}{2}\ \text{ или }\ x=0.$$

Найденным условиям удовлетворяет только $x=\frac{3}{2}$.

2 случай. $\log_{1-\frac{1}{2}x}(x-1)^2<0$. Тогда $\left(1-\frac{1}{2}x-1\right)\left((x-1)^2-1\right)<0;\quad x^2(x-2)>0.$

Учитывая, что $x<2$, находим, что в этом случае решений нет.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит обоснованный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам относительно x или относительно логарифма. Однако в ответ включено постороннее значение 0, либо допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу. Случай $y<0$ рассмотрен или доказано, что он невозможен.	2
Получено значение $\frac{3}{2}$, но случай $y<0$ не рассмотрен или не доказано, что он невозможен ИЛИ в ответ включены посторонние решения, ошибочно полученные из случая $y<0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 63, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 20 : 9, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Решение:

Пусть AD – высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O – центр вписанной окружности, P – точка ее касания с боковой стороной AB. Положим $AP=9x$, $BP=20x$. Тогда $AB=AP+BP=29x$, $BD=BP=20x$.

По теореме Пифагора $AB^2-BD^2=AD^2$, откуда

$$(29x)^2-(20x)^2=63^2;\quad (21x)^2=63^2,$$

значит $x=3$. Тогда,

$$AP=9x=27,\quad BD=20x=60,\quad AB=29x=87.$$

Обозначим $\angle BAD=\alpha$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что $tg\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{20}{21}$.

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 1), а также основания BC. Тогда D – точка касания, поэтому

$$BF=BD=60,\quad AF=AB+BF=AB+BD=87+60=147.$$

Следовательно,

$$r_1=O_1F=AFtg\alpha=147\cdot\frac{20}{21}=140.$$

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD – биссектрисы смежных углов BAK и CAB, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 63$.

Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB, также равен 63.

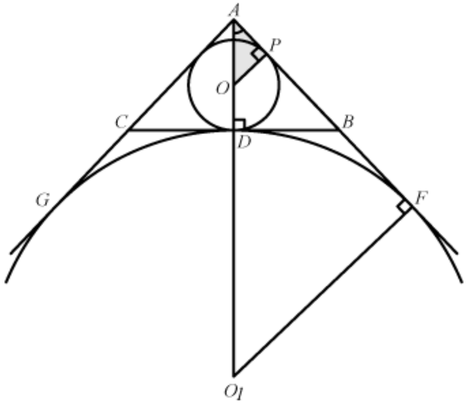


Рис.1

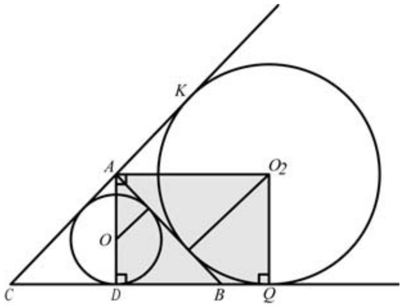


Рис.2

Ответ: 63 или 140

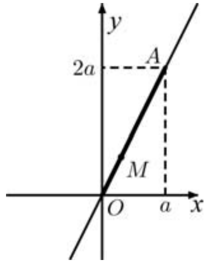
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2} = |a|\sqrt{5}, \\ y = ax + a^2 - 4 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение:



Если $a = 0$, то система, очевидно, не имеет решений. Пусть $a \neq 0$, O – начало координат, точка M имеет координаты $(x; y)$ и точка A имеет координаты $(a; 2a)$. Тогда $OM = \sqrt{x^2+y^2}$, $MA = \sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}$ и $OA = |a|\sqrt{5}$. Получаем $OM + MA = OA$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке OA.

Отрезок OA имеет более одной общей точки с прямой $y = ax + a^2 - 4$, только если этот отрезок лежит на прямой. Таким образом, координаты точек A и O должны удовлетворять второму уравнению системы:

$$\begin{cases} 2a = a^2 + a^2 - 4, \\ 0 = a^2 - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = a^2, \\ a^2 = 4; \end{cases} \quad a = 2.$$

Ответ: $a = 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу.	3
Обоснованно найдено значение 2, однако в ответ включены посторонние значения, полученные за счет логической ошибки в рассуждениях.	2
Решение содержит - или верное описание взаимного расположения отрезка и прямой. - или верный переход к уравнениям относительно a или с параметром a относительно одной из переменных, возможно без ограничений на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Метеоролог вводит в компьютер измерения температуры воздуха. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За все время наблюдений температура наблюдалась выше $20°C$, но ниже $26°C$. Всего метеоролог ввел 22 измерения, но из-за усталости и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой метеоролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую.

После упорядочивания данных получился ряд из 22 чисел, начинающийся числами 21,3; 21,7...

Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся равно 149,53. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 23,28.

Определите, в каких числах и какие ошибки допустил метеоролог.

Решение:

Пусть ряд выглядит так: 21,3; 21,7; x_3; x_4; ... x_{20}; a; b. В результате упорядочивания два числа с ошибками оказались последними. Это числа a и b. Тогда

$$\frac{x_3+x_4+...+x_{20}+a+b}{20}-\frac{21,3+21,7+x_3+x_4+...+x_{20}}{20}=149,53–23,28=126,25,$$

откуда $\frac{a+b}{20}-\frac{21,3+21,7}{20}=126{,}25$ и, значит, $a+b=2525+43=2568$.

Обозначим неизвестные цифры в числах a и b буквами: $a=\overline{2mp}$ и $b=\overline{2n0q}$.

Если $p+q=8$, то $m+0=6$. Тогда $a\geq 260$, что невозможно, поскольку все измерения показывали ниже $26°$. Следовательно, $p+q=18$, откуда $p=q=9$. Тогда $m=5$ и $n=3$. Получаем числа $a=259$ и $b=2309$.

Ответ: метеоролог ошибся в числе 25, 9, пропустив запятую, и в числе 23, 9, поставив вместо запятой ноль.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные значения.	4
Найдена сумма ошибочных чисел, но в вычислениях допущена ошибка, возможно приведшая к неверному ответу.	3
Найдены верные решения, однако доказательство единственности отсутствует или ошибочно.	2
Найдено несколько пар чисел, среди которых есть верное решение, отбор не произведен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4