Критерии оценивания заданий части 2

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно решено первое уравнение, но система решена неверно.
0	Решение неверно или отсутствует.
2	*Максимальный балл*

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С2
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Построен или описан линейный угол искомого угла или угол между перпендикулярами к плоскостям и , но получен неверный ответ или решение не закончено. 1ABC ABC
0	Решение неверно или отсутствует.
2	*Максимальный балл*

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
2	При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений, и, возможно, при-ведшая к неверному ответу.
1	Получен ответ, содержащий наряду с правильным постороннее реше-ние.
0	Решение не закончено или получен неверный ответ (кроме тех случа-ев, в которых выставляется 1–2 балла; см. выше).
3	*Максимальный балл*

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4
3	В представленном решении верно найдены оба возможных значения радиуса.
2	Рассмотрены оба случая расположения окружности, но верно найден только один радиус.
1	Рассмотрен только один случай расположения окружности и верно найден ее радиус.
0	Оба радиуса найдены неверно или не найдены.
3	*Максимальный балл*

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован: например, не указано явно необходимое и достаточное условие существования кор-ня, или то, что функция принимает все значения из промежутка , или решение содержит вычислительную ошибку. 1;f
2	Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рас-смотрены или при их рассмотрении допущены ошибки).
1	Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, но не найде-на никакая часть верного ответа.
0	Решение не содержит ни одного верно рассмотренного случая раскры-тия модуля.
4	*Максимальный балл*

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получена система необходимых и достаточных условий на пару иско-мых чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность.
2	Составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сде-ланы какие-либо существенные выводы для нахождения искомой пары чисел, уравнение до конца не решено, но верный ответ приведен.
1	Составлено, но не решено верное уравнение в натуральных числах, верный ответ приведен.
0	Ответ не найден, или ответ неверен, или в решении отсутствует верное уравнение в натуральных числах.
4	*Максимальный балл*

C1 Решите систему

$$\begin{cases}\sin x - \sin y = 1,\\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1.\end{cases}$$

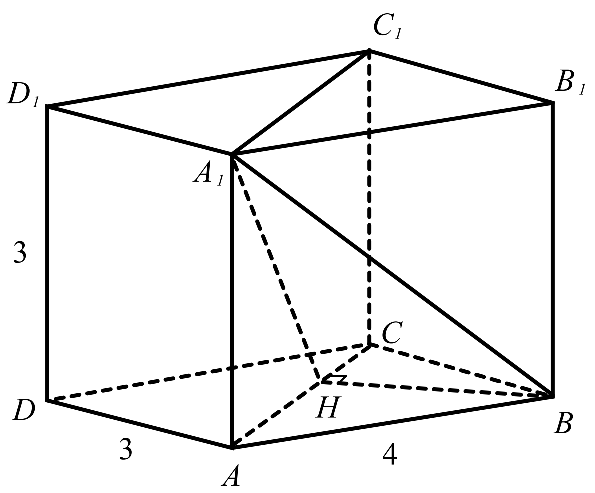
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases}\sin x - \sin y = 1,\\ \sin x + \sin y = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}2\sin x = 1,\\ 2\sin y = -1.\end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi),\ n \in Z, k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \frac{BH}{AB} = \frac{12}{25}$.

Ответ: $\arcsin\frac{12}{25}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 4$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$. Получаем: $\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{y^2-4y+4} = 4$; $|\,y+2\,| + |\,y-2\,| = 4$.

Учитывая, что $y \ge 0$ и поэтому $y + 4 > 0$, получаем:

$$y + 2 + |\,y-2\,| = 4;\ |\,y-2\,| = 2 - y.$$

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y - 2 \le 0$; $0 \le \sqrt{x-4} \le 2$; $4 \le x \le 8$.

Ответ: $x \in [4;8]$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Возьмем точку K на AB так, что $DK \quad EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6} S_{ABD} = \frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |\,x^2 + 2x - 3\,| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |\,x^2 + 2x - 3\,|$.

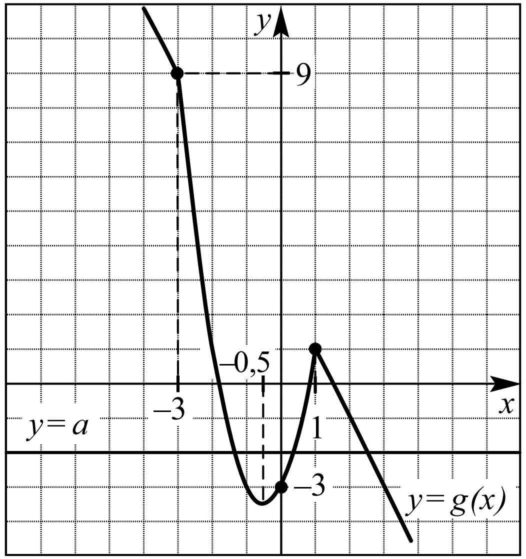


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \le -3$ или $x \ge 1$, то $|x^2+2x-3| = x^2+2x-3$, и $g(x)=-2x+3$.

Если $-3<x<1$, то $|x^2+2x-3| = -x^2-2x+3$, и $g(x)=2x^2+2x-3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2})<a<g(1)$.

$g(-\frac{1}{2})=-3,5$; $g(1)=1$.

Ответ: $-3,5<a<1$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m-3^n=1$.

При любом k число $3^{2k}+1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1}+1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n+1=2^m$, только если $m=1$ или $m=2$ (если $m \ge 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n=1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n=3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

Ответ: $m=2$, $n=1$.

C1 Решите систему

$$\begin{cases}(2x^2-5x-3)\sqrt{\cos y}=0,\\ \sin y = x.\end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x=(-1)^k$.

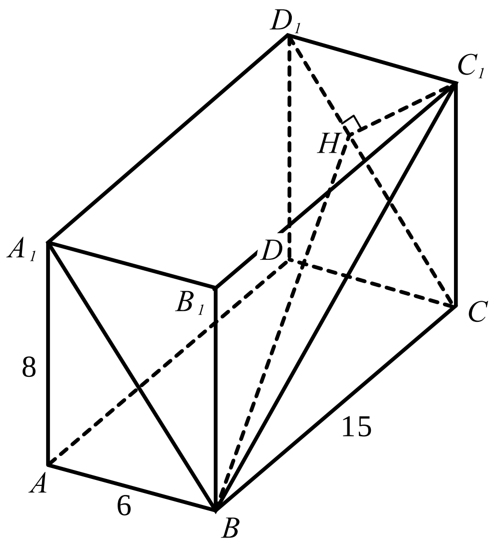
Если $\cos y>0$, то из первого уравнения находим: $x=3$ или $x=-\frac{1}{2}$.

При $x=3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x=-\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y>0$, получаем: $y=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $((-1)^k;\frac{\pi}{2}+\pi k), (-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}+2\pi k),\ k\in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1=8$, $AB=6$, $BC=15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H=\frac{D_1C_1\cdot C_1C}{D_1C}=\frac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1=17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B=\frac{C_1H}{BC_1}=\frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-1}$. Получаем:
$\sqrt{y^2+2y+1}-\sqrt{y^2-2y+1}=2$; $|y+1|-|y-1|=2$.

Учитывая, что $y\ge 0$ и поэтому $y+1>0$ Преобразуем уравнение: $y+1-|y-1|=2$; $|y-1|=y-1$.

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1\ge 0$; $\sqrt{x-1}\ge 1$; $x\ge 2$.

Ответ: $x\ge 2$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC=6$, $AE=2$, $CD=3$.

Обозначим $BD=y$, $BE=z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6}=\frac{z}{2}$ и $\frac{z+2}{6}=\frac{y}{3}$, откуда $\begin{cases}y+3=3z,\\ z+2=2y;\end{cases}$ $z=1{,}6;\ y=1{,}8$,

$AB=3{,}6,\ BC=4{,}8$.

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3{,}6^2+4{,}8^2-6^2}{2\cdot 3{,}6\cdot 4{,}8}=0$. Значит, $\angle B=90^\circ$.

Тогда $ED^2=y^2+z^2=1{,}6^2+1{,}8^2=5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|$.

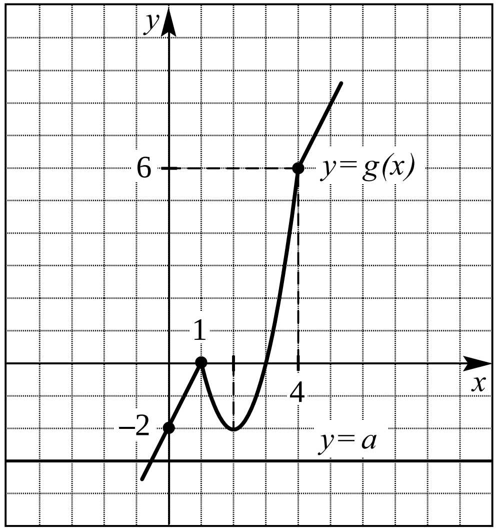


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x\le 1$ или $x\ge 4$, то $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, и $g(x)=2x-2$.

Если $1<x<4$, то $|x^2-5x+4|=-x^2+5x-4$, и $g(x)=2x^2-8x+6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех корней, только если $a\le g(2)$ или $a\ge g(1)$.

$g(2)=-2;\ g(1)=0$.

Ответ: $a\le -2,\ a\ge 0$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n-2^m=1$.

Пусть n – четное число $n=2k$. Тогда $2^m=3^{2k}-1=(3^k-1)(3^k+1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k-1=2$ и $3^k+1=4$, откуда $k=1$, и $n=2$. При этом $2^m=8$, следовательно, $m=3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, ...)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, 3^n-1 делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m=3^n-1$ получаем, что в этом случае $m=1$ (если $m\ge 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n-1=2$, откуда $n=1$.

Ответ: $m=3$, $n=2$ или $m=n=1$.

C1 Решите систему

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1.\end{cases}$$

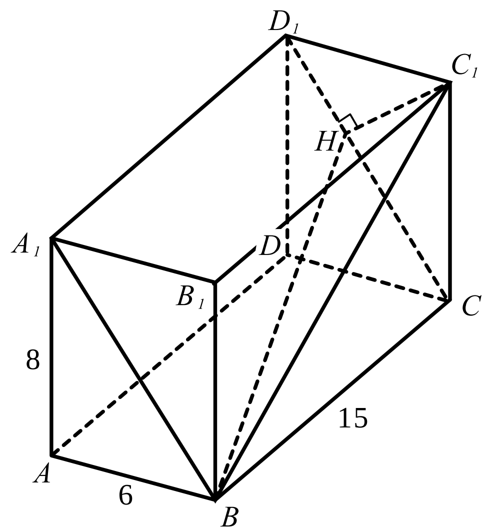
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x-\sin^2 y=0$. Учитывая, что $\sin x-\sin y=1$, получаем систему:

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin x+\sin y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}2\sin x=1,\\ 2\sin y=-1.\end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi),\ n\in Z, k\in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1=8$, $AB=6$, $BC=15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H=\dfrac{D_1C_1\cdot C_1C}{D_1C}=\dfrac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1=17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B=\dfrac{C_1H}{BC_1}=\dfrac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{24}{85}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4$.

Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-4}$.

Получаем: $\sqrt{y^2+4y+4}+\sqrt{y^2-4y+4}=4$; $|y+2|+|y-2|=4$.

Учитывая, что $y\ge 0$ и поэтому $y+4>0$, получаем:

$$y+2+|y-2|=4;\ \ |y-2|=2-y.$$

Воспользуемся определением модуля.

Получаем: $y-2\le 0; 0\le\sqrt{x-4}\le 2;\ 4\le x\le 8$.

Ответ: $x\in\ 4;8$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC=6$, $AE=2$, $CD=3$.

Обозначим $BD=y$, $BE=z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\dfrac{3+y}{6}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{z+2}{6}=\dfrac{y}{3}$, откуда $\begin{cases}y+3=3z,\\ z+2=2y;\end{cases}$ $z=1{,}6;\ y=1{,}8$,

$AB=3{,}6,\ BC=4{,}8$.

$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{3{,}6^2+4{,}8^2-6^2}{2\cdot 3{,}6\cdot 4{,}8}=0$. Значит, $\angle B=90^\circ$.

Тогда $ED^2=y^2+z^2=1{,}6^2+1{,}8^2=5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-|x^2+2x-3|$.

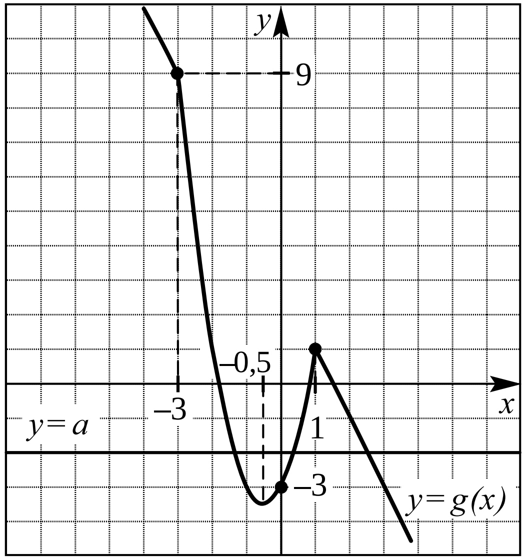


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

Если $x\le -3$ или $x\ge 1$, то $|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$, и $g(x)=-2x+3$.

Если $-3<x<1$, то $|x^2+2x-3|=-x^2-2x+3$, и $g(x)=2x^2+2x-3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2})<a<g(1)$.

$g(-\frac{1}{2})=-3,5;\ g(1)=1$.

Ответ: $-3,5<a<1$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n-2^m=1$.

Пусть n – четное число $n=2k$. Тогда $2^m=3^{2k}-1=(3^k-1)(3^k+1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k-1=2$ и $3^k+1=4$, откуда $k=1$, и $n=2$. При этом $2^m=8$, следовательно, $m=3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, ...)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, 3^n-1 делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m=3^n-1$ получаем, что в этом случае $m=1$ (если $m\ge 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n-1=2$, откуда $n=1$.

Ответ: $m=3, n=2$ или $m=n=1$.

C1 Решите систему

$$\begin{cases}(2x^2-5x-3)\sqrt{\cos y}=0,\\ \sin y = x.\end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x=(-1)^k$.

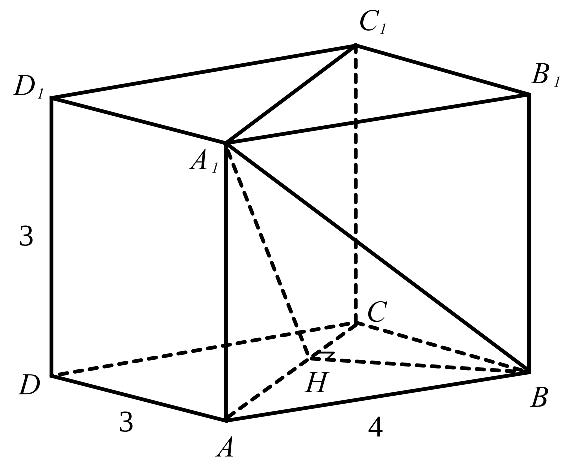
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x=3$ или $x=-\frac{1}{2}$.

При $x=3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x=-\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y>0$, получаем: $y=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Ответ: $((-1)^k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\,(-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}+2\pi k), k\in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1=3$, $AB=4$, $BC=4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{12}{5}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B=5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1=\frac{BH}{AB}=\frac{12}{25}$.

Ответ: $\arcsin\frac{12}{25}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-1}$. Получаем:

$\sqrt{y^2+2y+1}-\sqrt{y^2-2y+1}=2$; $|y+1|-|y-1|=2$.

Учитывая, что $y\ge 0$ и поэтому $y+1>0$ Преобразуем уравнение: $y+1-|y-1|=2$; $|y-1|=y-1$.

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1\ge 0$; $\sqrt{x-1}\ge 1$; $x\ge 2$.

Ответ: $x\ge 2$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC=1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Возьмем точку K на AB так, что $DK\ \ EC$. Если $BK=x$, то $KE=2x$ и $EA=EB=3x$. Значит, $S_{AEF5}=\left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED}=\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}S_{ABD}=\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{10}S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|$.

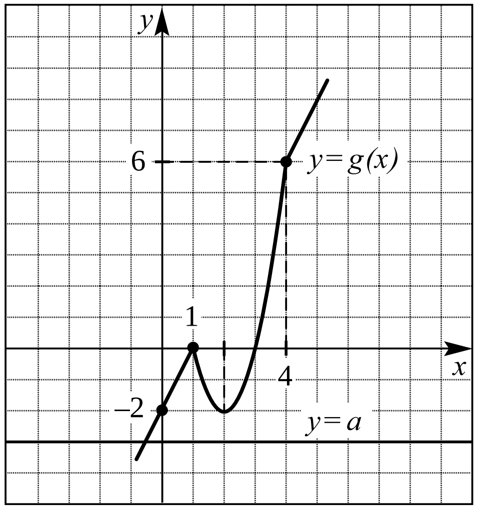


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x\le 1$ или $x\ge 4$, то $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, и $g(x)=2x-2$.

Если $1<x<4$, то $|x^2-5x+4|=-x^2+5x-4$, и $g(x)=2x^2-8x+6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех корней, только если $a\le g(2)$ или $a\ge g(1)$.

$g(2)=-2;\ g(1)=0$.

Ответ: $a\le -2,\ a\ge 0$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m-3^n=1$.

При любом k число $3^{2k}+1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1}+1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n+1=2^m$, только если $m=1$ или $m=2$ (если $m\ge 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n=1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n=3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

Ответ: $m=2, n=1$.

C1 Решите систему

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1.\end{cases}$$

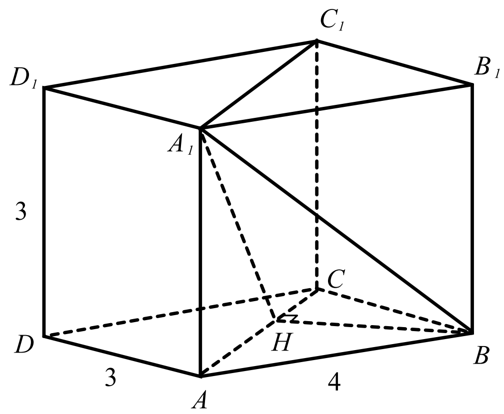
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x-\sin^2 y=0$. Учитывая, что $\sin x-\sin y=1$, получаем систему:

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin x+\sin y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}2\sin x=1,\\ 2\sin y=-1.\end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi),\ n\in Z, k\in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1=3$, $AB=4$, $BC=4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{12}{5}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{12}{25}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{12}{25}$.

C3 Решите неравенство $\log_2(x^2-4) - 3\log_2\dfrac{x+2}{x-2} > 2$.

Из неравенства следует, что либо $x > 2$, либо $x < -2$.

Если $x > 2$, то неравенство принимает вид $\log_2(x+2) - 2\log_2(x-2) < -1$;

$\log_2 2(x+2) < \log_2(x-2)^2$;

$2x+4 < (x-2)^2$;

$x^2 - 6x > 0$;

$x(x-6) > 0$.

Учитывая, что $x > 2$, получаем: $x > 6$.

Если $x < -2$, то неравенство принимает вид $\log_2(-x-2) - 2\log_2(2-x) < -1$;

$\log_2 2(-x-2) < \log_2(2-x)^2$;

$-2x-4 < (2-x)^2$;

$x^2 - 2x + 8 > 0$.

Полученное неравенство выполняется при всех x.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Возьмем точку K на AB так, что $DK\ \ EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{5}{6}S_{ABD} = \dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{3}S_{ABC} = \dfrac{1}{10}S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

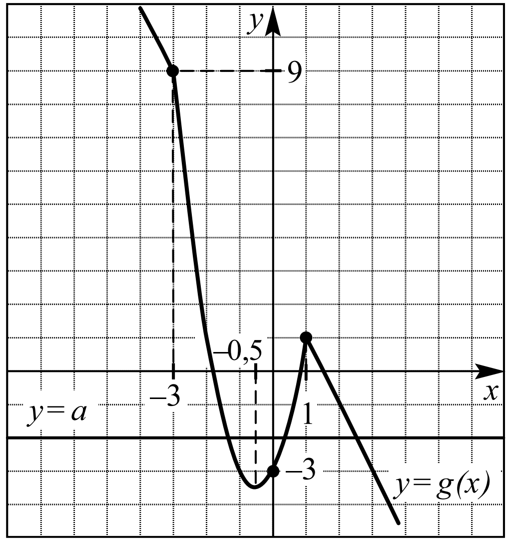


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \le -3$ или $x \ge 1$, то $|x^2+2x-3| = x^2+2x-3$, и $g(x) = -2x+3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2+2x-3| = -x^2-2x+3$, и $g(x) = 2x^2+2x-3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2}) < a < g(1)$.

$g(-\frac{1}{2}) = -3,5;\ g(1) = 1$.

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

С6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

При любом k число $3^{2k}+1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1}+1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n+1=2^m$, только если $m=1$ или $m=2$ (если $m \geq 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n=1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n=3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

Ответ: $m=2$, $n=1$.

С1 Решите систему

$$\begin{cases}(2x^2-5x-3)\sqrt{\cos y}=0,\\ \sin y = x.\end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y=\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x=(-1)^k$.

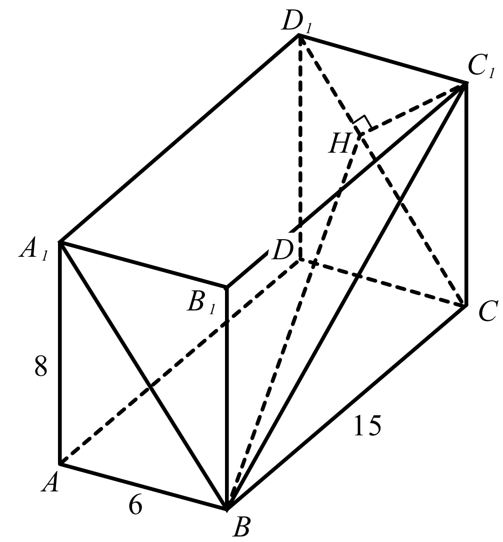
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x=3$ или $x=-\frac{1}{2}$.

При $x=3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x=-\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y>0$, получаем: $y=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Ответ: $((-1)^k;\frac{\pi}{2}+\pi k), (-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}+2\pi k), k \in Z$.

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1=8$, $AB=6$, $BC=15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \dfrac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \dfrac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \dfrac{C_1H}{BC_1} = \dfrac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{24}{85}$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x$.

Сделаем замену: $y = \log_2 x$. Получаем: $\dfrac{y-5}{1-2y} \geq 2y$; $\dfrac{4y^2 - y - 5}{2y-1} \leq 0$; $\dfrac{(y+1)(4y-5)}{2y-1} \leq 0$.

Тогда $y \leq -1$ или $\dfrac{1}{2} < y \leq \dfrac{5}{4}$.

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} \log x \leq -1, \\ 0,5 < \log x \leq 1,25; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}. \end{array}\right.$

Ответ: $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Обозначим $BD = y$, $BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\dfrac{3+y}{6} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{z+2}{6} = \dfrac{y}{3}$, откуда $\begin{cases} y + 3 = 3z, \\ z + 2 = 2y; \end{cases}$ $z = 1,6$; $y = 1,8$,

$AB = 3,6$, $BC = 4,8$.

$\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \dfrac{3,6^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4,8} = 0$. Значит, $\angle B = 90^\circ$.

Тогда $ED^2 = y^2 + z^2 = 1,6^2 + 1,8^2 = 5,8$.

Ответ: $\sqrt{5,8}$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

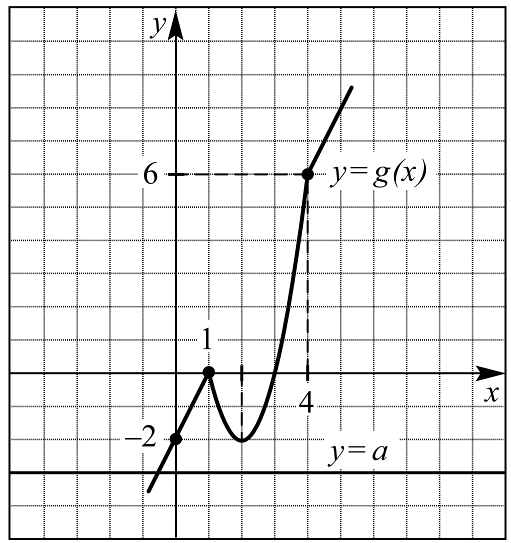


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \leq g(2)$ или $a \geq g(1)$.

$g(2) = -2$; $g(1) = 0$.

Ответ: $a \leq -2$, $a \geq 0$.

С6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, ...)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.

С1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

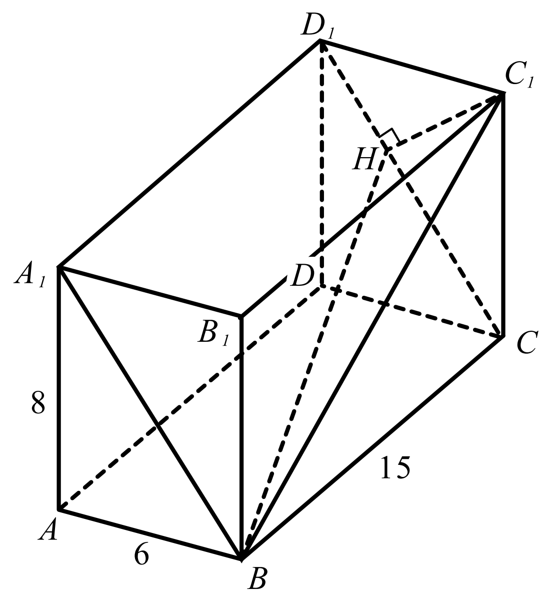
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi;\ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi),\ n \in Z, k \in Z$.

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}$.

C3 Решите неравенство $\log_2(x^2-4) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2$.

Из неравенства следует, что либо $x > 2$, либо $x < -2$.

Если $x > 2$, то неравенство принимает вид $\log_2(x+2) - 2\log_2(x-2) < -1$;

$\log_2 2(x+2) < \log_2(x-2)^2$;

$2x+4 < (x-2)^2$;

$x^2 - 6x > 0$;

$x(x-6) > 0$.

Учитывая, что $x > 2$, получаем: $x > 6$.

Если $x < -2$, то неравенство принимает вид $\log_2(-x-2) - 2\log_2(2-x) < -1$;

$\log_2 2(-x-2) < \log_2(2-x)^2$;

$-2x-4 < (2-x)^2$;

$x^2 - 2x + 8 > 0$.

Полученное неравенство выполняется при всех x.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Обозначим $BD = y$, $BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и $\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}$, откуда $\begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases}$ $z = 1{,}6$; $y = 1{,}8$,

$AB = 3{,}6$, $BC = 4{,}8$.

$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{3{,}6^2 + 4{,}8^2 - 6^2}{2 \cdot 3{,}6 \cdot 4{,}8} = 0$. Значит, $\angle B = 90^\circ$.

Тогда $ED^2 = y^2 + z^2 = 1{,}6^2 + 1{,}8^2 = 5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

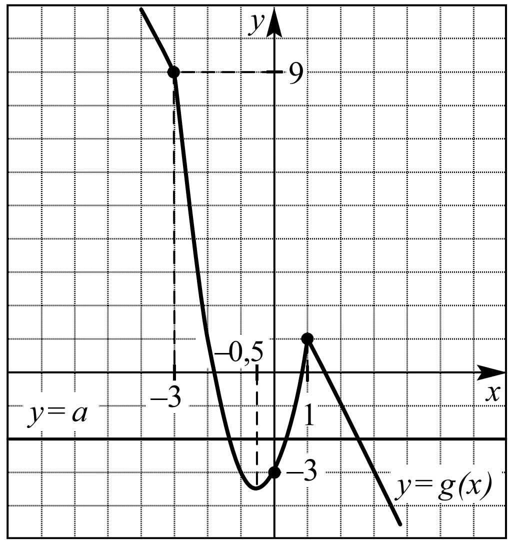


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \le -3$ или $x \ge 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$, и $g(x) = -2x + 3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2}) < a < g(1)$.

$g(-\frac{1}{2}) = -3,5;\ g(1) = 1.$

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, ...)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3$, $n = 2$ или $m = n = 1$.

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x = (-1)^k$.

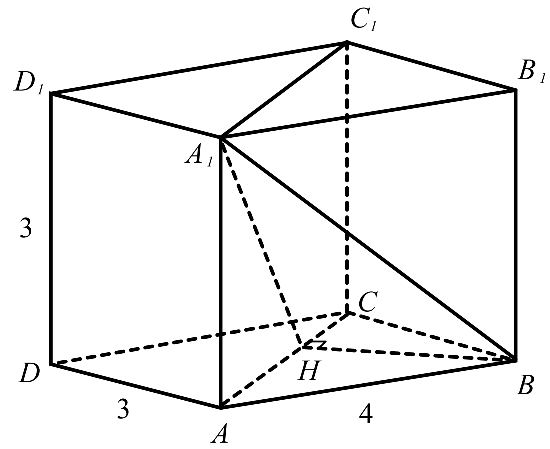
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x = 3$ или $x = -\frac{1}{2}$.

При $x = 3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x = -\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y > 0$, получаем: $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ (-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k),\ k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \frac{BH}{AB} = \frac{12}{25}$.

Ответ: $\arcsin\frac{12}{25}$.

C3 Решите неравенство $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \ge 2\log_2 x$.

Сделаем замену: $y = \log_2 x$. Получаем: $\frac{y-5}{1-2y} \ge 2y$; $\frac{4y^2 - y - 5}{2y-1} \le 0$; $\frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1} \le 0$.

Тогда $y \le -1$ или $\frac{1}{2} < y \le \frac{5}{4}$.

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} \log x \le -1, \\ 0,5 < \log x \le 1,25; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \le \sqrt[4]{32}. \end{array}\right.$

Ответ: $0 < x \le \frac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \le \sqrt[4]{32}$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Возьмем точку K на AB так, что DK EC. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

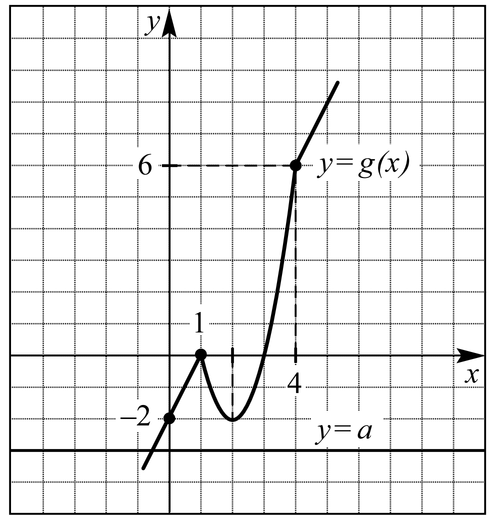


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \le 1$ или $x \ge 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \le g(2)$ или $a \ge g(1)$.

$g(2) = -2$; $g(1) = 0$.

Ответ: $a \le -2$, $a \ge 0$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

При любом k число $3^{2k} + 1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1} + 1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n + 1 = 2^m$, только если $m = 1$ или $m = 2$ (если $m \ge 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m = 1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n=3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

Ответ: $m=2$, $n=1$.