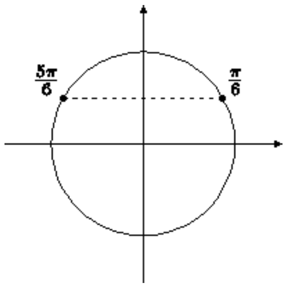
## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**С1** Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

**Решение:**




Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \le 0$.

Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ положительно при всех допустимых $x$.

Значит, $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Так как $\cos x \le 0$, числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями уравнения.

**Ответ:** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

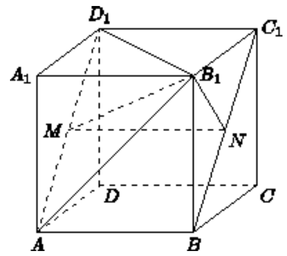
| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной $x$, при которой равен нулю множитель $2\sin x - 1$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**С2** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна $1$. Найдите расстояние от середины отрезка $BC_1$ до плоскости $AB_1D_1$.



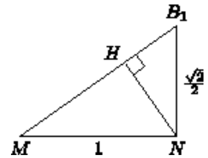


**Решение:**




$M$ – середина $AD_1$, $N$ – середина $BC_1$.
Проведем перпендикуляр $NH$ из точки $N$ к плоскости $AB_1D_1$, $NM \perp AD_1$, Значит $HM \perp AD_1$.

Поэтому точка $H$ лежит на отрезке $MB_1$, перпендикулярном $AD_1$.




Искомый отрезок $NH$ является высотой прямоугольного треугольника $MNB_1$ с прямым углом $N$. Поэтому

$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Ответ:** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**С3** Решите неравенство $\left(2x - 3 - \frac{5}{x}\right)\left(\frac{14}{x+1} + 2 + \left(\sqrt{-1-2x}\right)^2\right) \ge 0$.

**Решение:**

Левая часть неравенства имеет смысл при $x \ne 0$, $x \ne -1$, $-1 - 2x \ge 0$, т.е. при $x \ne -1$, $x \le -0,5$.

Приводя выражения в скобках к общему знаменателю, для таких $x$ получаем:

$$\left(2x - 3 - \frac{5}{x}\right)\left(\frac{14}{x+1} + 1 - 2x\right) \ge 0; \qquad \frac{2x^2 - 3x - 5}{x} \cdot \frac{15 - 2x^2 - x}{x+1} \ge 0;$$

$$\frac{2x^2-3x-5}{x}\cdot\frac{2x^2+x-15}{x+1}\le 0;\qquad \frac{(2x-5)(x+1)}{x}\cdot\frac{(2x-5)(x+3)}{x+1}\le 0;$$

$$\frac{(2x-5)^2(x+3)(x+1)}{x(x+1)}\le 0.$$

Решение полученного неравенства: $-3\le x<-1$ или $-1<x<0$ или $x=2,5$. Остается учесть условие $x\le -0,5$.

**Ответ:** $[-3;-1)\cup(-1;-0,5]$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 3 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам. Получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, в которых определено исходное неравенство | 2 |
| Решение содержит верные преобразования правого множителя левой части неравенства, сводящие его к произведению и частному линейных выражений. | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**С4** Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка $C$, а на другой – точки $A$ и $B$, причем треугольник $ABC$ – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**Решение:**

Пусть $r$ – искомый радиус, а точка $H$ – основание высоты $CH$ треугольника $ABC$.





1 случай. Точка $C$ – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC=BC=13$, и $CH$ – медиана треугольника $ABC$.

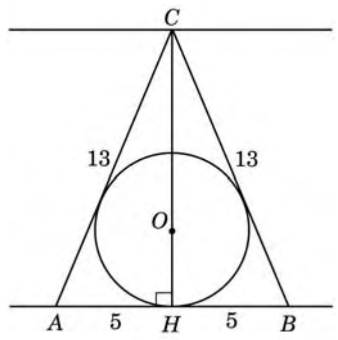


Рис.1

Из прямоугольного треугольника $AHC$ находим:

$$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5,\ AB=2AH=10.$$

Тогда, если $p$ – полупериметр треугольника, то

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{AH\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{60}{18}=\frac{10}{3}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек $A$ или $B$. Пусть, для определенности, вершина в точке $B$. Проведем высоту $CH$. Если $H$ находится на продолжении стороны $AB$, то треугольник $ABC$ тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если $H$ лежит на стороне $AB$ (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника $BHC$ находим:

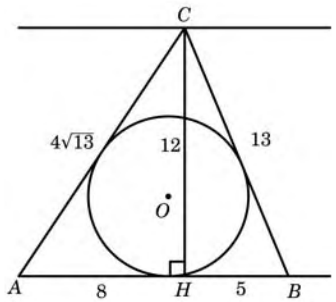


Рис.2

$$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5,\ AH=13-5=8.$$

Из прямоугольного треугольника $ACH$ находим:

$$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{13\cdot 6}{\frac{1}{2}(26+4\sqrt{13})}=\frac{13\cdot 6}{13+2\sqrt{13}}=\frac{26-4\sqrt{13}}{3}.$$

**Ответ:** $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C5** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

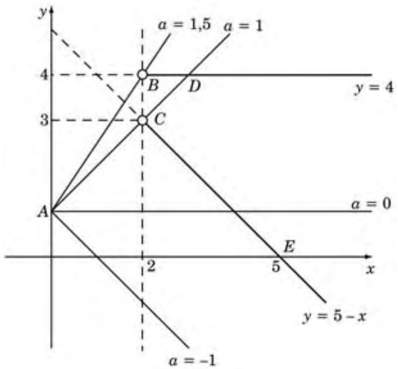
$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение:**

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$




Уравнение $(y-4)(x+y-5) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 4$ и $y = 5 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5) = 0, \\ x > 2 \end{cases}$$





задает части этих прямых, расположенные правее прямой $x = 2$, т.е. лучи $BD$ и $CE$ без точек $B$ и $C$ (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую $m$ с угловым коэффициентом $a$, проходящую через точку $A(0; 1)$. Следует найти все значения $a$, при каждом из которых прямая $m$ имеет единственную общую точку с объединением лучей $BD$ и $CE$.

а) Прямая $AB$ задается уравнением $y = 1,5x + 1$. Поэтому при $a \geq 1,5$ прямая $m$ не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$.

б) Прямая $AC$ задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 \leq a < 1,5$ прямая $m$ пересекает луч $BD$, но не пересекает луч $CE$.

в) При $0 < a < 1$ прямая $m$ пересекает и луч $BD$, и луч $CE$.

г) Наконец, при $-1 < a \leq 0$ прямая $m$ пересекает только луч $CE$, а при $a \leq -1$ она не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$.

**Ответ:** $-1 < a \leq 0$, $1 \leq a < 1,5$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность | 3 |
| Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность | 2 |
| Решение содержит:<br>- или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи;<br>- или верное получение квадратного уравнения с параметром $a$ относительно одной из переменных | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**С6** Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

**Решение:**

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2+\ldots+7)(13+\ldots+21)=\left(\frac{2+7}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{13+21}{2}\cdot 9\right)=27\cdot 153=4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21)=1\cdot 1=1.$$

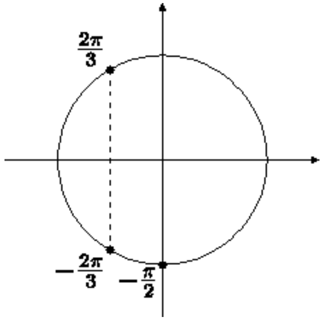
**Ответ:** 1 и 4131.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1) | 3 |
| Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0 | 2 |
| Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0 | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**C1** Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

**Решение:**




Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x \le 0$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 = 0$, то $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 \ne 0$, то $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Так как $\sin x \le 0$, числа $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями уравнения.

**Ответ:** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной $x$, при которых равен нулю множитель $2\cos x + 1$ или множитель $\sqrt{-\sin x} - 1$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

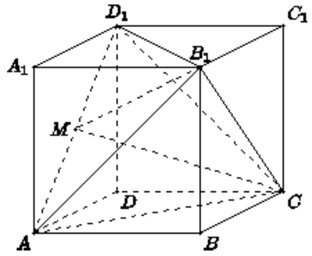
**C2** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между плоскостями $AB_1D_1$ и $ACD_1$.





**Решение:**




Пусть $M$ – середина $AD_1$, и пусть ребро куба равно 1.

Поскольку треугольники $AB_1D_1$ и $ACD_1$ правильные, $B_1M \perp AD_1$ и $CM \perp AD_1$, то есть угол $CMB_1$ – линейный угол искомого двугранного угла.

Найдем стороны треугольника $CMB_1$:

$$B_1C = \sqrt{2},\ CM = MB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Применяя к этому треугольнику теорему косинусов, находим:

$$\cos\angle CMB_1 = \frac{MB_1^2 + CM^2 - B_1C^2}{2MB_1\cdot CM} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Ответ:** $\arccos\frac{1}{3}$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**C3** Решите неравенство $\left(2x + 1 - \frac{6}{x}\right)\left(\frac{28}{x+2} - 2 + \left(\sqrt{-3-2x}\right)^2\right) \ge 0$.

**Решение:**

Левая часть неравенства имеет смысл при $x \ne 0$, $x \ne -2$, $-3 - 2x \ge 0$, т.е. при $x \ne -2$, $x \le -1,5$.

Приводя выражения в скобках к общему знаменателю, для таких $x$ получаем:

$$\left(2x + 1 - \frac{6}{x}\right)\left(\frac{28}{x+2} - 5 - 2x\right) \ge 0; \qquad \frac{2x^2 + x - 6}{x}\cdot\frac{18 - 2x^2 - 9x}{x+2} \ge 0;$$

$$\frac{2x^2+x-6}{x}\cdot\frac{2x^2+9x-18}{x+2}\le 0;\qquad \frac{(2x-3)(x+2)}{x}\cdot\frac{(2x-3)(x+6)}{x+2}\le 0;$$

$$\frac{(2x-3)^2(x+6)(x+2)}{x(x+2)}\le 0.$$

Решение полученного неравенства: $-6\le x<-2$ или $-2<x<0$. Остается учесть условие $x\le -1,5$.

**Ответ:** $[-6;-2)\cup(-2;-1,5]$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 3 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам. Получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, в которых определено исходное неравенство | 2 |
| Решение содержит верные преобразования правого сомножителя левой части неравенства, сводящие его к произведению и частному линейных выражений. | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C4** Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка $C$, а на другой – точки $A$ и $B$, причем треугольник $ABC$ – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**Решение**:
Пусть $r$ – искомый радиус, а точка $H$ – основание высоты $CH$ треугольника $ABC$.

1 случай. Точка $C$ – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC=BC=5$, и $CH$ – медиана треугольника $ABC$. Из прямоугольного треугольника $AHC$ находим:

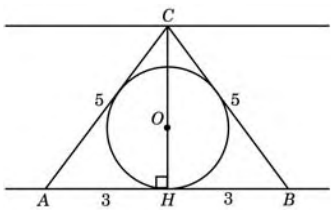


Рис.1

$$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,\quad AB=2AH=6.$$

Тогда, если $p$ – полупериметр треугольника, то





$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{AH\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек $A$ или $B$. Пусть, для определенности, вершина в точке $B$. Проведем высоту $CH$. Если $H$ находится на продолжении стороны $AB$, то треугольник $ABC$ тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если $H$ лежит на стороне $AB$ (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника $BHC$ находим:

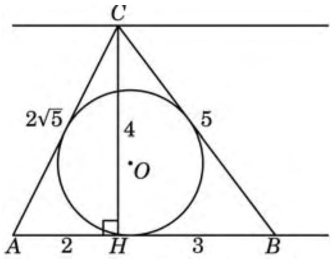


Рис.2

$$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,\ AH=5-3=2.$$

Из прямоугольного треугольника $ACH$ находим:

$$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}.$$

Тогда

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{5\cdot 2}{\frac{1}{2}(10+2\sqrt{5})}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

**Ответ**: $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C5** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

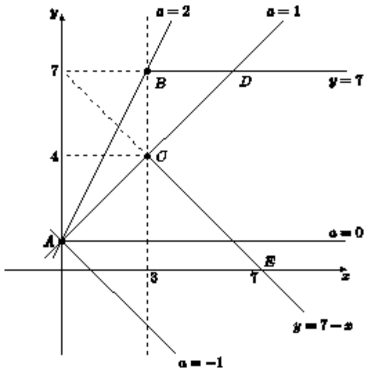
$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение:**

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-7)(x+y-7) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$




Уравнение $(y-7)(x+y-7) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 7$, $y = 7 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y-7)(x+y-7) = 0, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенные в полуплоскости $x \geq 3$, т.е. лучи $BD$ и $CE$, включая точки $B$ и $C$ (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую $m$ с угловым коэффициентом $a$, проходящую через точку $A(0; 1)$.

Следует найти все значения $a$, при каждом из которых прямая $m$ имеет единственную общую точку с объединением лучей $BD$ и $CE$.

а) Прямая $AB$ задается уравнением $y = 2x + 1$. Поэтому при $a > 2$ прямая $m$ не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$, а при $a = 2$ есть только одна точка пересечения – точка $B$.

б) Прямая $AC$ задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 < a < 2$ прямая $m$ пересекает луч $BD$, но не пересекает луч $CE$, т.е. условие задачи выполнено. При $a = 1$ есть две точки пересечения: $C$ и $D$.

в) При $0 < a < 1$ прямая $m$ пересекает и луч $BD$, и луч $CE$.





г) При $-1 < a \leq 0$ прямая $m$ не пересекает луч $BD$, но пересекает луч $CE$, а при $a \leq -1$ прямая $m$ не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$.

**Ответ:** $-1 < a \leq 0$, $1 < a \leq 2$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность | 3 |
| Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность. | 2 |
| Решение содержит:<br>– или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи;<br>– или верное получение квадратного уравнения с параметром $a$ относительно одной из переменных | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**C6** Найдите все тройки натуральных чисел $k$, $m$ и $n$, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ $\quad (1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

**Решение:**

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, верны неравенства $n < m$ и $k < m$.

2. Пусть $k \leq n$. Тогда $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!$, откуда $4 \geq n + 1$, и $k \leq n \leq 3$.

3. Пусть $k > n$. Тогда $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \geq k + 1$, и $n < k \leq 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3$, $1 \leq k \leq 3$ находим все решения.

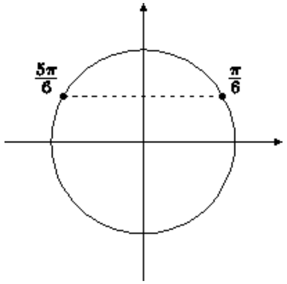
**Ответ:** $k = 1, n = 2, m = 3$; $k = n = 3, m = 4$; $k = 2, n = 1, m = 3$.

| **Содержание критерия оценивания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы | 3 |
| Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована | 2 |
| Приведен хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**С1** Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

**Решение:**




Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \le 0$.

Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ положительно при всех допустимых $x$.

Значит, $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Так как $\cos x \le 0$, числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями уравнения.

**Ответ:** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

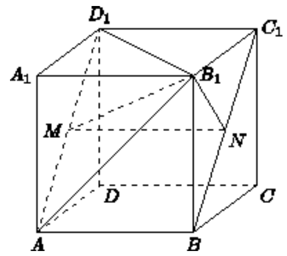
| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной $x$, при которой равен нулю множитель $2\sin x - 1$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**С2** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка $BC_1$ до плоскости $AB_1D_1$.



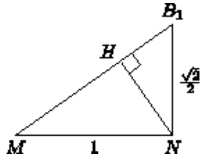


**Решение:**




$M$ – середина $AD_1$, $N$ – середина $BC_1$.
Проведем перпендикуляр $NH$ из точки $N$ к плоскости $AB_1D_1$, $NM \perp AD_1$, Значит $HM \perp AD_1$.

Поэтому точка $H$ лежит на отрезке $MB_1$, перпендикулярном $AD_1$.




Искомый отрезок $NH$ является высотой прямоугольного треугольника $MNB_1$ с прямым углом $N$. Поэтому

$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Ответ:** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**С3** Решите неравенство

$$\log_3\left(x^2 + 7x + 10\right) + \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+5}{9} + 1 \ge \log_3\left(3x^2 + 16x + 20\right)$$

**Решение:**
Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2 + 7x + 10 > 0, \\ x + 5 > 0, \\ 3x^2 + 16x + 20 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+2)(x+5) > 0, \\ x + 5 > 0, \\ (3x+10)(x+2) > 0; \end{cases} \quad x > -2.$$

Для таких $x$ получаем:

$$\log_3((x+2)(x+5)) - \log_3\frac{x+5}{9} + 1 \geq \log_3((x+2)(3x+10));$$

$$\log_3(x+2) + \log_3(x+5) - \log_3(x+5) + 3 \geq \log_3(x+2) + \log_3(3x+10);$$

$$\log_3(3x+10) \leq 3;\ 3x+10 \leq 27;\ x \leq \frac{17}{3}.$$

Значит, $-2 < x \leq \dfrac{17}{3}$.

**Ответ:** $\left(-2; \dfrac{17}{3}\right]$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 3 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам и получен ответ, отличающийся от верного ответа только конечным количеством значений переменной, в которых определены обе части неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C4** Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка $C$, а на другой – точки $A$ и $B$, причем треугольник $ABC$ – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**Решение:**
Пусть $r$ – искомый радиус, а точка $H$ – основание высоты $CH$ треугольника $ABC$.





1 случай. Точка $C$ – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC = BC = 13$, и $CH$ – медиана треугольника $ABC$.

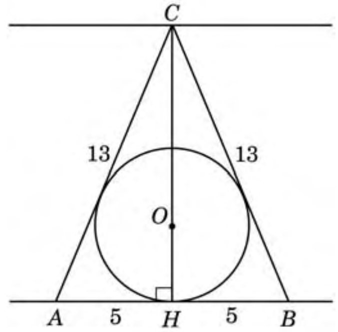


Рис.1

Из прямоугольного треугольника $AHC$ находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,\ AB = 2AH = 10.$$

Тогда, если $p$ – полупериметр треугольника, то

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AH \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек $A$ или $B$. Пусть, для определенности, вершина в точке $B$. Проведем высоту $CH$. Если $H$ находится на продолжении стороны $AB$, то треугольник $ABC$ тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если $H$ лежит на стороне $AB$ (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника $BHC$ находим:

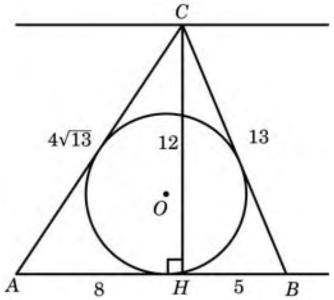


Рис.2

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,\ AH = 13 - 5 = 8.$$

Из прямоугольного треугольника $ACH$ находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)} = \frac{13 \cdot 6}{\frac{1}{2}(26+4\sqrt{13})} = \frac{13 \cdot 6}{13+2\sqrt{13}} = \frac{26-4\sqrt{13}}{3}.$$

**Ответ:** $\dfrac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $\dfrac{10}{3}$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C5** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

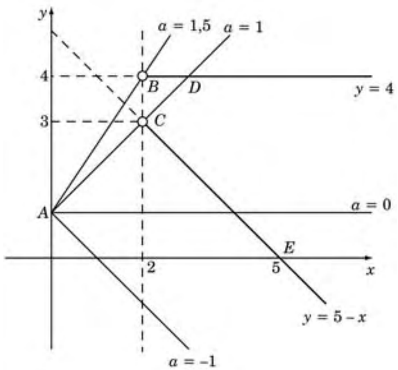
$$\begin{cases} y^2+xy-4x-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение:**

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5)=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$




Уравнение $(y-4)(x+y-5)=0$ задает пару пересекающихся прямых $y=4$ и $y=5-x$. Система

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5)=0, \\ x>2 \end{cases}$$





задает части этих прямых, расположенные правее прямой $x=2$, т.е. лучи $BD$ и $CE$ без точек $B$ и $C$ (см. рис.). Уравнение $y=ax+1$ задает прямую $m$ с угловым коэффициентом $a$, проходящую через точку $A(0;1)$. Следует найти все значения $a$, при каждом из которых прямая $m$ имеет единственную общую точку с объединением лучей $BD$ и $CE$.

а) Прямая $AB$ задается уравнением $y=1,5x+1$. Поэтому при $a \ge 1,5$ прямая $m$ не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$.

б) Прямая $AC$ задается уравнением $y=x+1$. Поэтому при $1 \le a < 1,5$ прямая $m$ пересекает луч $BD$, но не пересекает луч $CE$.

в) При $0 < a < 1$ прямая $m$ пересекает и луч $BD$, и луч $CE$.

г) Наконец, при $-1 < a \le 0$ прямая $m$ пересекает только луч $CE$, а при $a \le -1$ она не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$.

**Ответ:** $-1 < a \le 0,\ 1 \le a < 1,5$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность | 3 |
| Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность | 2 |
| Решение содержит:<br>- или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи;<br>- или верное получение квадратного уравнения с параметром $a$ относительно одной из переменных | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**С6** Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

**Решение:**

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2+\ldots+7)(13+\ldots+21)=\left(\frac{2+7}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{13+21}{2}\cdot 9\right)=27\cdot 153=4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21)=1\cdot 1=1.$$

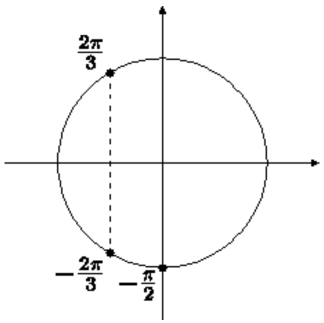
**Ответ:** 1 и 4131.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1) | 3 |
| Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0 | 2 |
| Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0 | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**C1** Решите уравнение $(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0$.

**Решение:**




Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x\le 0$.
Если $\sqrt{-\sin x}-1=0$, то $\sin x=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z$.

Если $\sqrt{-\sin x}-1\ne 0$, то $2\cos x+1=0$; $\cos x=-\frac{1}{2}$;
$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Так как $\sin x\le 0$, числа $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ не являются решениями уравнения.

**Ответ:** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

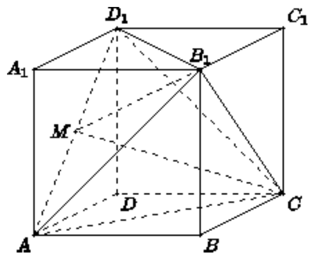
| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной $x$, при которых равен нулю множитель $2\cos x+1$ или множитель $\sqrt{-\sin x}-1$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**C2** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Найдите угол между плоскостями $AB_1D_1$ и $ACD_1$.





**Решение:**




Пусть $M$ – середина $AD_1$, и пусть ребро куба равно 1.

Поскольку треугольники $AB_1D_1$ и $ACD_1$ правильные, $B_1M\perp AD_1$ и $CM\perp AD_1$, то есть угол $CMB_1$ – линейный угол искомого двугранного угла.
Найдем стороны треугольника $CMB_1$:

$$B_1C=\sqrt{2},\ CM=MB_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Применяя к этому треугольнику теорему косинусов, находим:

$$\cos\angle CMB_1=\frac{MB_1^2+CM^2-B_1C^2}{2MB_1\cdot CM}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}.$$

**Ответ:** $\arccos\frac{1}{3}$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**C3** Решите неравенство

$$\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\frac{x}{4}+2\ge\log_2(x^2+3x-4).$$

**Решение:**
Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases}x^2+4x>0,\\ x>0,\\ x^2+3x-4>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x(x+4)>0,\\ x>0,\\ (x-1)(x+4)>0;\end{cases}\quad x>1.$$

Для таких $x$ получаем:

$$\log_2(x(x+4)) - \log_2\frac{x}{4} + 2 \geq \log_2((x-1)(x+4));$$

$$\log_2 x + \log_2(x+4) - \log_2 x + 4 \geq \log_2(x-1) + \log_2(x+4);$$

$$\log_2(x-1) \leq 4;\ \ x-1 \leq 16;\ \ x \leq 17.$$

Значит, $1 < x \leq 17$.

**Ответ:** $(1;\,17]$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 3 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам и получен ответ, отличающийся от верного ответа только конечным количеством значений переменной, в которых определены обе части неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C4** Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка $C$, а на другой – точки $A$ и $B$, причем треугольник $ABC$ – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**Решение**:
Пусть $r$ – искомый радиус, а точка $H$ – основание высоты $CH$ треугольника $ABC$.

1 случай. Точка $C$ – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC = BC = 5$, и $CH$ – медиана треугольника $ABC$. Из прямоугольного треугольника $AHC$ находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,\quad AB = 2AH = 6.$$

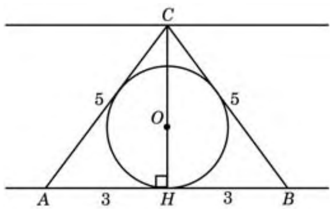


Рис.1

Тогда, если $p$ – полупериметр треугольника, то





$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AH \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек $A$ или $B$. Пусть, для определенности, вершина в точке $B$. Проведем высоту $CH$. Если $H$ находится на продолжении стороны $AB$, то треугольник $ABC$ тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если $H$ лежит на стороне $AB$ (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника $BHC$ находим:

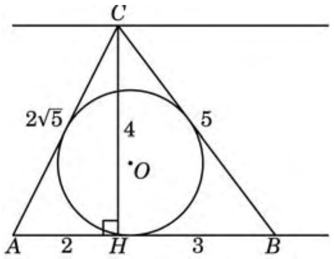


Рис.2

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,\ AH = 5 - 3 = 2.$$

Из прямоугольного треугольника $ACH$ находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{5 \cdot 2}{\frac{1}{2}(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Ответ**: $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**С5** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

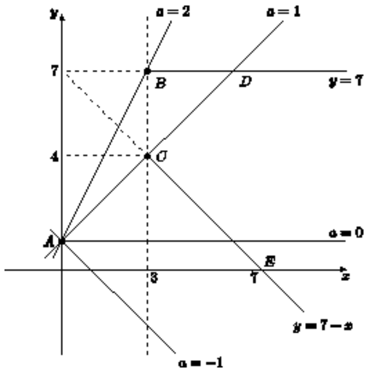
$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \ge 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение:**

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-7)(x+y-7) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \ge 3. \end{cases}$$




Уравнение $(y-7)(x+y-7) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 7$, $y = 7 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y-7)(x+y-7) = 0, \\ x \ge 3 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенные в полуплоскости $x \ge 3$, т.е. лучи $BD$ и $CE$, включая точки $B$ и $C$ (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую $m$ с угловым коэффициентом $a$, проходящую через точку $A(0; 1)$.

Следует найти все значения $a$, при каждом из которых прямая $m$ имеет единственную общую точку с объединением лучей $BD$ и $CE$.

а) Прямая $AB$ задается уравнением $y = 2x + 1$. Поэтому при $a > 2$ прямая $m$ не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$, а при $a = 2$ есть только одна точка пересечения – точка $B$.

б) Прямая $AC$ задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 < a < 2$ прямая $m$ пересекает луч $BD$, но не пересекает луч $CE$, т.е. условие задачи выполнено. При $a = 1$ есть две точки пересечения: $C$ и $D$.

в) При $0 < a < 1$ прямая $m$ пересекает и луч $BD$, и луч $CE$.





г) При $-1 < a \le 0$ прямая $m$ не пересекает луч $BD$, но пересекает луч $CE$, а при $a \le -1$ прямая $m$ не пересекает ни луч $BD$, ни луч $CE$.

**Ответ:** $-1 < a \le 0$, $1 < a \le 2$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность | 3 |
| Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность. | 2 |
| Решение содержит:<br>– или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи;<br>– или верное получение квадратного уравнения с параметром $a$ относительно одной из переменных | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**С6** Найдите все тройки натуральных чисел $k$, $m$ и $n$, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ $(1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

**Решение:**

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, верны неравенства $n < m$ и $k < m$.

2. Пусть $k \le n$. Тогда $4 \cdot n! \ge 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \ge (n+1) \cdot n!$, откуда $4 \ge n+1$, и $k \le n \le 3$.

3. Пусть $k > n$. Тогда $4 \cdot k! \ge 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \ge (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \ge k+1$, и $n < k \le 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1 \le n \le 3$, $1 \le k \le 3$ находим все решения.

**Ответ:** $k = 1, n = 2, m = 3$; $k = n = 3, m = 4$; $k = 2, n = 1, m = 3$.

| Содержание критерия оценивания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы | 3 |
| Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована | 2 |
| Приведен хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |