

**Демонстрационный вариант диагностической работы
по МАТЕМАТИКЕ 14 мая 2009 г.
(без производной)**

Диагностическая работа предназначена для выявления проблемных зон знаний учащихся 10 классов общеобразовательных учреждений.

Состав экзаменационных материалов и время выполнения работы

В экзаменационные материалы входят задания В1 – В12, к которым следует дать краткий ответ, и задания С1 – С6, для которых следует привести полное решение.

Состав варианта школа имеет право выбрать.

1. Полная работа из 18 заданий: 12 заданий части 1 и 6 заданий части 2. В этом случае на работу рекомендуется отвести 240 минут.

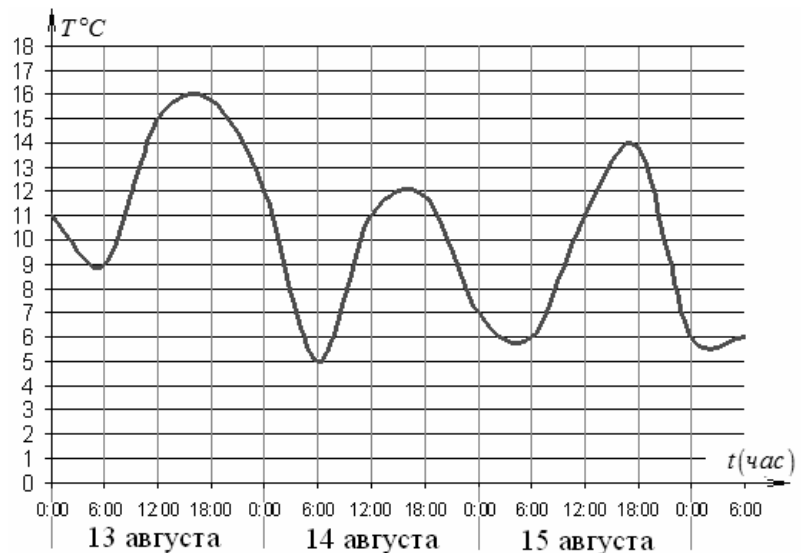
2. Работа из 12 заданий части 1. В этом случае на работу рекомендуется отвести от 90 до 120 минут.

Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

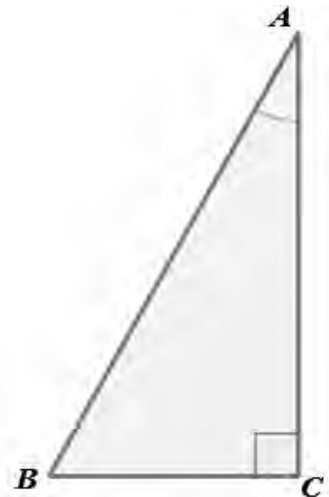
- В1** Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

- В2** На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



- В3** Найдите корень уравнения $3^{x-2} = 27$.

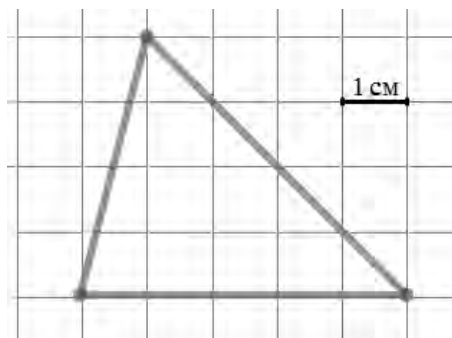
- В4** В прямоугольном треугольнике ABC (см. рис.) $\sin A = 0,6$, гипотенуза AB имеет длину 15 см. Найдите длину катета AC . Ответ дайте в сантиметрах. Единицы измерения в ответе не пишите.



- B5** Строительной фирме нужно приобрести 75 м^3 пеноблоков. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице

Поставщик	Стоимость пеноблоков (р. за м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
1	2650 р.	5000 р.	
2	2900 р.	1000 р.	При заказе на сумму больше 150000 р. доставка бесплатно
3	2700 р.	4900 р.	При заказе на сумму больше 200000 р. доставка бесплатно

- B6** На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



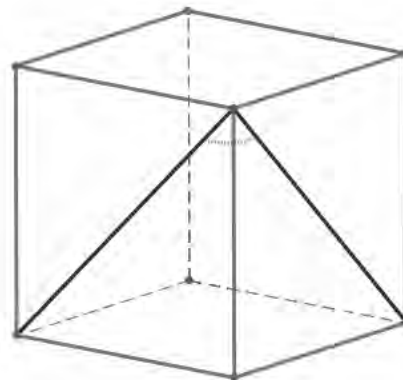
- B7** Вычислите значение выражения $10 + 2 \log_5 \frac{1}{25}$.

- B8** На рисунке изображен график движения автобуса. На оси абсцисс откладывается время в часах, на оси ординат – пройденный путь в км. Пользуясь графиком, найдите среднюю скорость движения автобуса. Ответ дайте в км/ч. Единицы измерения не пишете.



B9 Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

B10 Дан куб. Найдите угол между диагоналями двух соседних граней (см. рис.). Ответ дайте в градусах. Единицы измерения не пишите.



B11 Решите уравнение $\log_4(x+10) = \log_2(x-2)$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите сумму корней.

B12 Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1-C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

C2 К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

C3 Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x^3} - 1}{x+1} \leq x$.

C4 На стороне BA угла ABC , равного 30° , взята такая точка D , что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

C6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел a и b , что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

**Система оценивания демонстрационного варианта
экзаменационной работы по МАТЕМАТИКЕ**

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	5
B2	14
B3	5
B4	12
B5	202500
B6	10
B7	6
B8	56
B9	2,4
B10	60
B11	6
B12	20

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
C1	$x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
C2	на три части в отношении 1 : 1 : 1
C3	$[-2; -1), [0; 1]$
C4	1 или 7
C5	$-8 \leq a \leq 6$
C6	$a = 2, b = 5$

Решения и критерии оценивания части 2

Оценки заданий части 2 зависят от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом: решение должно быть математически грамотным, содержать рассмотрение всех возможных случаев (если таковые имеются); из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Задания допускают различные методы решения и записи ответа. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают. Некоторые ошибки в решениях могут квалифицироваться экспертами как опiski или неточности, не влияющие на оценку выполнения задания.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов. Однако они не исчерпывают всех возможных ситуаций. При проверке работ предметной комиссии в ряде случаев придется принимать решение, как квалифицировать тот или иной недочет учащегося, сопоставляя продвижения в решении задачи с приведенными критериями.

Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

При выполнении задания экзаменуемый может использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

Решение.

1. Сделаем замену $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = t$. Тогда $x^2 + 3x = t^2 + 1$. Из первого уравнения получаем: $t^2 - t - 6 = 0$.

Корни: $t = 3$ или $t = -2$.

Получаем: $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3$ или $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = -2$.

Второе уравнение не имеет корней. Решим первое: $x^2 + 3x - 10 = 0$;
 $x = -5$ или $x = 2$.

2. При каждом из найденных значений x решим второе уравнение.

а) Если $x = -5$, из второго уравнения получаем: $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$.

$\frac{25}{8} > 1$, поэтому $\frac{5}{2\sqrt{2}} > 1$, значит, уравнение $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$ не имеет решений, поскольку правая часть меньше, чем -1 .

б) Если $x = 2$, из второго уравнения получаем:

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) $x = 2, y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

Б) $\begin{cases} x = 2, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$

В) $\left(2; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \left(2; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно решено первое уравнение, но в системе получен неточный ответ (отличающийся от верного тем, что в него включена посторонняя серия, в которой $x = -5$).
0	Решение не закончено или приводит к неверному ответу (отличному и от верного, и от неточного).
2	<i>Максимальный балл</i>

C2

К диагонали куба, соединяющей две его вершины, не лежащие в одной грани, провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

Решение. Пусть на диагональ AC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1 спроектировали все остальные вершины. Для вершины B имеем:

$$AB = 1, \quad BC_1 = \sqrt{2}.$$

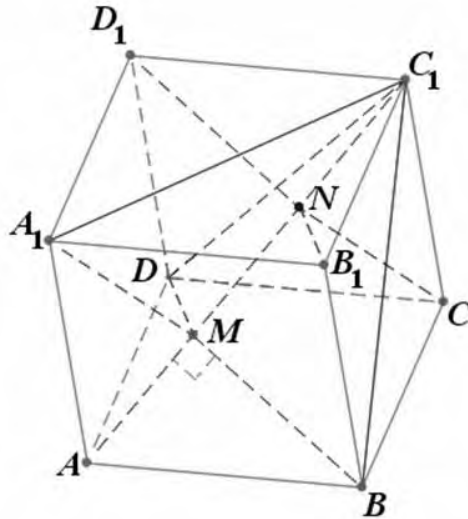


Рис. 1

Диагональ куба AC_1 равна $\sqrt{3}$. В треугольнике ABC_1 :

$$AB^2 = AM \cdot MC_1, \text{ откуда } 1 = AM \cdot \sqrt{3}$$

(пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике). Следовательно, $AM = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} AC_1$, откуда $AM : MC_1 = 1 : 2$.

Таким же способом находим, что проекции точек A_1 и D делят диагональ AC_1 в том же отношении. Значит, вершины A_1 и D проектируются также в точку M .

Аналогично, вершины D_1, C и B_1 имеют общую проекцию N , которая делит диагональ в отношении $AN : NC_1 = 2 : 1$.

Поэтому $AM : MN : NC_1 = 1 : 1 : 1$.

Ответ: на три части в отношении $1 : 1 : 1$.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) на 3 равные части;

Б) основания перпендикуляров разделили диагональ на три равные части.

Другие варианты решения

А. Рассмотрим три некопланарных вектора

$$\overline{AB} = \vec{e}_1, \overline{AD} = \vec{e}_2, \overline{AA_1} = \vec{e}_3.$$

Длина каждого вектора равна 1, и эти три вектора попарно перпендикулярны. Пусть точка B проектируется на диагональ AC_1 в точку M . Тогда

$$\overline{AM} = \lambda \overline{AC_1} = \lambda(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3),$$

$$\overline{A_1M} = \overline{A_1A} + \overline{AM} = -\vec{e}_3 + \lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3 = \lambda\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + (\lambda - 1)\vec{e}_3.$$

Так как $\overrightarrow{A_1M} \perp \overrightarrow{AC_1}$, их скалярное произведение равно нулю:
 $\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$, то есть

$$\lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0; \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

Аналогично, $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC_1}; \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC_1}$.

Пусть D_1 проектируется в точку N ; аналогично получаем, что $\overrightarrow{C_1N} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1A}$ и $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{C_1A}$ и $\overrightarrow{B_1N} \perp \overrightarrow{C_1A}$. Значит, отрезки AM, MN и NC_1 равны, то есть диагональ AC_1 разделена в отношении 1:1:1.

Б. Используем координатно-векторный метод. Введем систему координат, считая, что начало координат в точке A , а оси координат проходят через точки B, D и A_1 (рис.1). Тогда в прямоугольном треугольнике AA_1C_1 (рис. 2) находим:

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AA_1}| \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

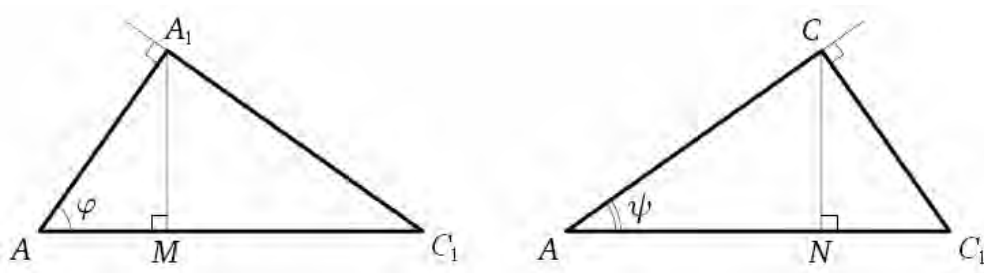


Рис. 2

Так же находим, что $AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, если M – проекция точки D или точки B .

Пусть N – проекция точки C на AC_1 . В треугольнике ACC_1 находим:

$$|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{AC}| \cos \psi = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Аналогично находим, что $|\overrightarrow{AN}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, если точка N – проекция точки B_1 или D_1 .

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
-------	--

3	В представленном решении обоснованно получены верные ответы на оба вопроса задачи.
2	Получен и обоснован верный ответ на первый вопрос задачи, а на второй вопрос ответ не дан или неверен.
1	Получен, но не обоснован верный ответ на первый вопрос задачи, а на второй вопрос ответ не дан или неверен..
0	Решение не закончено или получен неверный ответ на первый вопрос задачи.
3	<i>Максимальный балл</i>

С3

Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x;$$

$$\frac{\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)}-(x^2+x+1)}{x+1} \leq 0.$$

Заметим, что $x^2+x+1 > 0$ при всех x . Значит, обе части неравенства можно разделить на $\sqrt{x^2+x+1}$:

$$\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \leq 0.$$

Выражение в числителе при всех допустимых x имеет тот же знак, что и выражение

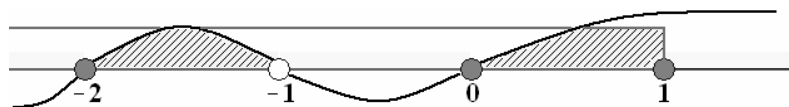
$$(1-x)-(x^2+x+1).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{(1-x)-(x^2+x+1)}{x+1} \leq 0, \\ 1-x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x+2)}{x+1} \geq 0, \\ x \leq 1; \end{cases}$$

$$-2 \leq x < -1 \text{ или } 0 \leq x \leq 1.$$



Ответ: $[-2; -1); [0; 1]$.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) $-2 \leq x < -1; 0 \leq x \leq 1$;

Б) $x \in [-2; -1) \cup [0; 1]$.

Другой вариант решения. Преобразуем неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-x^3} - (x^2 + x + 1)}{x+1} \leq 0.$$

Учитывая, что $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ при всех x , можем записать:

$$\frac{\sqrt{1-x^3} - \sqrt{(x^2 + x + 1)^2}}{x+1} \leq 0.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} \sqrt{(1-x)(x^2 + x + 1)} \leq \sqrt{(x^2 + x + 1)^2}, \\ x+1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq (1-x)(x^2 + x + 1) \leq (x^2 + x + 1)^2, \\ x+1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 1-x \leq x^2 + x + 1, \\ x+1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x \leq 1, \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq -2; \end{cases} \end{cases}$$

$$x \in [0; 1].$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{(1-x)(x^2+x+1)} \geq \sqrt{(x^2+x+1)^2}, \\ x+1 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-x \geq x^2+x+1, \\ x+1 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 0, \\ x < -1; \end{cases}$$

$$x \in [-2; -1).$$

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
2	Получен неточный ответ (отличающийся от верного тем, что из него исключены какие-либо из чисел $-2, 0, 1$).
1	Из-за арифметических ошибок получен неверный ответ, содержащийся в области $x \leq 1$ и/или в ответ включено число 1.
0	Решение не закончено или получен неверный ответ (кроме тех случаев, в которых выставляется 1–2 балла; см. выше).
3	<i>Максимальный балл</i>

С4

На стороне BA угла ABC , равного 30° , взята такая точка D , что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC .

Решение. Центр искомой окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AD с перпендикуляром к прямой BC , проходящим через точку касания. Для точки X касания искомой окружности с прямой BC по теореме о касательной и секущей имеем

$$BX^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3, \text{ откуда } BX = \sqrt{3}.$$

Существуют две возможности.

1) Точка касания лежит на луче BC (рис. 3.). Тогда центр окружности совпадает с серединой O отрезка AD , так как в прямоугольном треугольнике OBE

$$\angle OBE = 30^\circ, \quad OB = 2, \quad BE = \sqrt{3},$$

и точка X совпадает с точкой E .

Искомый радиус окружности равен 1, поскольку $OE = OA = OD = 1$.

2) Точка касания X лежит на продолжении луча BC за точку B . Пусть Q – центр искомой окружности, $F = X$ – основание перпендикуляра, опущенного из Q на прямую BC , а G – точка пересечения прямых QF и AD .

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$9|x - 1| + |3x - |x + a|| - 4x = 0.$$

Непрерывная функция $f(x) = 9|x - 1| + |3x - |x + a|| - 4x$

1) неограниченно возрастает при $x \geq 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geq 9 - 4 - 4 = 1 > 0$;

2) убывает при $x \leq 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

Где $k \leq -9 - 4 + 4 = -9 < 0$.

Следовательно, $x = 1$ – точка минимума функции f , а область ее значений есть множество $[f(1); +\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда

$$f(1) \leq 0.$$

Решим это неравенство:

$$|3 - |1 + a|| \leq 4;$$

$$-4 \leq |a + 1| - 3 \leq 4;$$

$$|a + 1| \leq 7;$$

$$-7 \leq a + 1 \leq 7;$$

$$-8 \leq a \leq 6.$$

Ответ: $-8 \leq a \leq 6$.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) $[-8; 6]$;

Б) $a \in [-8; 6]$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован (например, не указано явно, что функция принимает все значения из множества $[f(1); +\infty)$) или решение содержит ошибки.
2	Верно рассмотрены отдельные случаи расположения x , в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или в них допущены ошибки).
1	Верно рассмотрены отдельные случаи, но не найдена никакая часть верного ответа.
0	Решение не содержит ни одного верно рассмотренного случая.
4	<i>Максимальный балл</i>

С6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b , что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

Решение. Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}, \text{ поэтому } 10^n (b - a^2) = ab. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что $b > a^2 \geq a$.

Так как числа a и b взаимно простые, то числа $b - a^2$ и ab тоже взаимно простые. (Действительно, пусть p – общий простой делитель этих чисел. Тогда, если p делитель a , то p будет делителем b . Если же p – делитель b , то p будет делителем a^2 , значит p – делитель a . Поэтому p – общий делитель a и b , то есть $p = 1$.)

Значит, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} b - a^2 = 1, \\ ab = 10^n, \\ \text{НОД}(a, b) = 1. \end{cases}$$

Поэтому возможны только два случая:

1) $b = 10^n$, $a = 1$, но тогда уравнение $b - a^2 = 1$ принимает вид $10^n = 2$ и не имеет натуральных решений.

2) $b = 5^n$, $a = 2^n$. Для этой пары уравнение $b - a^2 = 1$ принимает вид

$$5^n - 4^n = 1, \text{ откуда } \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как функция от n , стоящая в левой части последнего уравнения возрастает, а в правой – убывает, то решение $n = 1$ единственное.

Ответ: $a = 2, b = 5$.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) $(2; 5)$;

Б) $\frac{5}{2} = 2,5$;

В) $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получена система необходимых и достаточных условий на пару искомых чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность.
2	Угадан ответ и составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сделаны какие-либо существенные выводы для нахождения искомой пары чисел.
1	Угадан ответ и составлено верное уравнение в натуральных числах.
0	Ответ не найден ИЛИ ответ неверен ИЛИ в решении не составлено верное уравнение в натуральных числах.
4	<i>Максимальный балл</i>