

**Критерии оценивания заданий с развернутым ответом**

**C1**

Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0, \\ \sqrt{\sin x} \sqrt{2 - y - y^2} = 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Из неравенства  $6x - x^2 + 8 \geq 0$  получаем:  $2 \leq x \leq 4$ .

1 случай. Пусть  $x = 2$  или  $x = 4$ . Если  $x = 4$ , то  $\sin x < 0$ ; если  $x = 2$ , то  $\sin x > 0$ . Из второго уравнения получаем:  $2 - y - y^2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = 1$ .

Если  $y = -2$ , то  $\cos y < 0$ . Если  $y = 1$ , то  $\cos y > 0$ . Значит,  $x = 2, y = 1$ .

2 случай. Пусть теперь  $2 < x < 4$ . Тогда  $6x - x^2 - 8 > 0$ , и поэтому из первого уравнения получаем:  $\cos y = 0$ .

Учтем, что  $2 - y - y^2 \geq 0$ . Тогда  $-2 \leq y \leq 1$ . Из всех решений уравнения  $\cos y = 0$  этому условию удовлетворяет только  $y = -\frac{\pi}{2}$ . При этом  $2 - y - y^2 > 0$  и, из второго уравнения получаем:  $\sin x = 0$ . Из всех решений этого уравнения интервалу  $2 < x < 4$  принадлежит только  $x = \pi$ . Значит  $x = \pi, y = -\frac{\pi}{2}$ .

**Ответ:**  $(2; 1), (\pi; -\frac{\pi}{2})$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

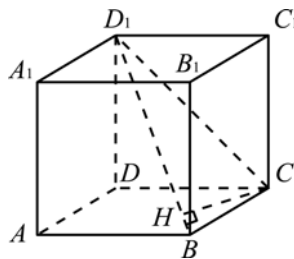
**C2** В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $BD_1$ .

**Решение.**

Проведем отрезок  $CD_1$  и опустим перпендикуляр  $CH$  на  $BD_1$ . Искомое расстояние равно высоте  $CH$  прямоугольного треугольника  $BCD_1$  с прямым углом  $C$ :

$$CH = \frac{CD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C3** Решите неравенство  $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$ .

**Решение.**

Так как  $0 < 7^{-|x-3|} \leq 1$  и  $\log_2(6x - x^2 - 7) = \log_2(2 - (x - 3)^2) \leq 1$ ,

переходим к системе

$$\begin{cases} \log_2(2 - (x - 3)^2) = 1, \\ 7^{-|x-3|} = 1. \end{cases}$$

Получаем:  $x = 3$

**Ответ:**  $x = 3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Не сделана оценка $7^{- x-3 } > 0$ или не рассмотрен случай отрицательных множителей. Ответ верный	2
Получен верный ответ равносильными преобразованиями или с помощью оценок, но не доказано отсутствие других решений. Или при верном ходе решения ответ неверный, или отсутствует за счет вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C4** Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

**Решение.**

Пусть центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$ , а точки касания  $A$  и  $B$ . Проведем через точку  $B$  прямую, параллельную  $O_1O_2$ . Точку пересечения этой прямой с  $O_1A$  обозначим  $K$ . Треугольник  $KAB$  прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

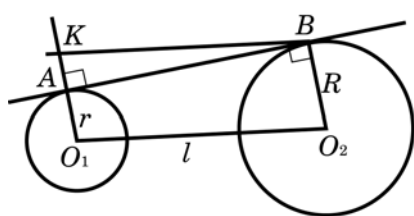


Рис. 1

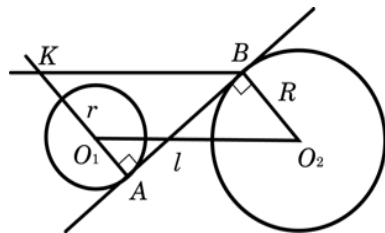


Рис. 2

1. Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
  2. Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).
- Обозначим радиусы окружностей  $R$  и  $r$ , расстояние между центрами окружностей  $l$ . В первом случае  $AK = R - r$ , во втором случае  $AK = R + r$ .

Из прямоугольного треугольника  $KAB$  находим:

в первом случае  $AB = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$ ,

во втором случае  $AB = \sqrt{l^2 - (R + r)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$ .

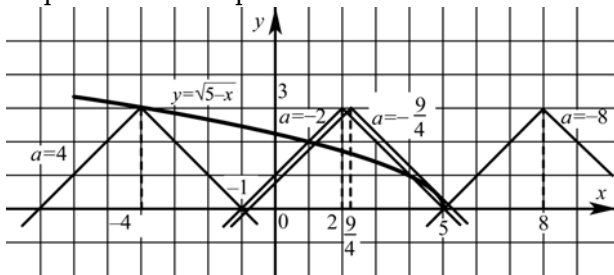
**Ответ:** 30 или 16.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$  является отрезок.

**Решение.**

Перепишем неравенство в виде  $\sqrt{5-x} \leq 3 - |x+a|$ , и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных  $a$ , получаем:

$$-8 < a \leq -\frac{9}{4} \text{ или } -2 < a < 4.$$

**Ответ:**  $\left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup (-2; 4)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери или приобретения одного из значений параметра	3
Получен ответ: $-8 < a < 4$ (возможно включение концов). В решении представлена правильная графическая интерпретация или соответствующие ей равносильные преобразования	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра	1
Все ситуации, отличные от описанных выше	0

**С6** Найдите несократимую дробь  $\frac{p}{q}$  такую, что

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567 \overbrace{888\dots 87654321}^{2000}}{12345678 \overbrace{999\dots 987654321}^{1999}}$$

**Решение.**

Рассмотрим число  $a = \overbrace{11\dots 1}^{2007}$  и сложим «в столбик» числа:  $a, 10a, 10^2a, \dots, 10^7a$  – получим числитель исходной дроби  $m$ ; а складывая числа:  $a, 10a, 10^2a, \dots, 10^7a, 10^8a$  – получим знаменатель  $n$ , где  $m = ap, n = aq$  ( $p = 11\ 111\ 111$ ,  $q = 111\ 111\ 111$ ) и числа  $p, q$  – взаимно простые.

**Ответ:**  $\frac{11111111}{111111111}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ верный, но не доказано, что полученная дробь несократима	3
Метод решения правильный, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки	2
Решение дано для дроби с меньшим числом 8 в числителе и 9 в знаменателе и сделан верный, но необоснованный вывод относительно данной дроби	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**Критерии оценивания заданий с развернутым ответом**

**C1**

Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 2\cos 2x + 3\sin x = 1, \\ y^2 \cos x + y \cos x + \frac{\sqrt{15}}{2} = 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Из первого уравнения получаем:  $2 - 4\sin^2 x + 3\sin x = 1$ , откуда  $4\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$ .  
Значит,  $\sin x = 1$  или  $\sin x = -\frac{1}{4}$ .

Если  $\cos x = 0$ , то второе уравнение не имеет решений. При  $\cos x \neq 0$  рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно  $y$ . Дискриминант равен  $\cos^2 x - 2\sqrt{15}\cos x = \cos x(\cos x - 2\sqrt{15})$ . Чтобы уравнение имело действительные решения, нужно, чтобы дискриминант был неотрицателен. Выражение  $\cos x - 2\sqrt{15}$  отрицательно при всех возможных  $x$ , значит,  $\cos x < 0$ .

Следовательно, случай  $\sin x = 1$  невозможен, а из  $\sin x = -\frac{1}{4}$  находим:  
 $x = \pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k, k \in Z$ .

При этом  $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ . Второе уравнение принимает вид:  $-\frac{\sqrt{15}}{4}y^2 - \frac{\sqrt{15}}{4}y + \frac{\sqrt{15}}{2} = 0$ , откуда:  $y^2 + y - 2 = 0$ . Значит,  $y = 1$  или  $y = -2$ .

**Ответ:**  $(\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k; -2); (\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k; 1), k \in Z$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C2**

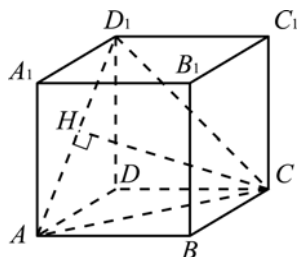
В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $AD_1$ .

**Решение.**

Проведем отрезки  $CD_1$  и  $AC$ . Искомое расстояние равно длине перпендикуляра  $CH$ , проведенного к прямой  $AD_1$ . Этот перпендикуляр является медианой равностороннего треугольника  $ACD_1$  со стороной  $\sqrt{2}$ .

$$CH = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C3**

Решите неравенство  $5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$ .

**Решение.**

Так как  $0 < 5^{-|x-2|} \leq 1$  и  $\log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2(2 - (x-2)^2) \leq 1$ ,

приходим к системе 
$$\begin{cases} \log_2(4x - x^2 - 2) = 1, \\ 5^{-|x-2|} = 1. \end{cases}$$
 Получаем:  $x = 2$ .

**Ответ:**  $x = 2$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Не сделана оценка $5^{- x-2 } > 0$ или не рассмотрен случай отрицательных множителей. Ответ верный	2
Получен верный ответ равносильными преобразованиями или с помощью оценок, но не доказано отсутствие других решений. Или при верном ходе решения ответ неверный, или отсутствует за счет вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C4**

Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

**Решение.**

Пусть центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$ , а точки касания  $A$  и  $B$ . Проведем через точку  $B$  прямую, параллельную  $O_1 O_2$ . Точку пересечения этой прямой с  $O_1 A$  обозначим  $K$ . Треугольник  $KAB$  прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

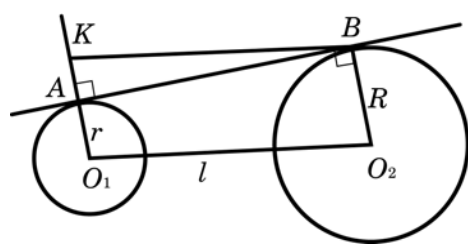


Рис. 1

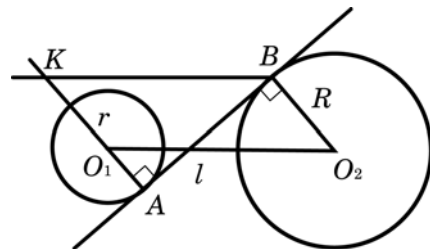


Рис. 2

1. Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
  2. Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).
- Обозначим радиусы окружностей  $R$  и  $r$ , расстояния между центрами окружностей  $l$ . В первом случае  $AK = R - r$ , во втором случае  $AK = R + r$ .

Из прямоугольного треугольника  $KAB$  находим:

в первом случае  $AB = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$ ,

во втором случае  $AB = \sqrt{l^2 - (R + r)^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14$ .

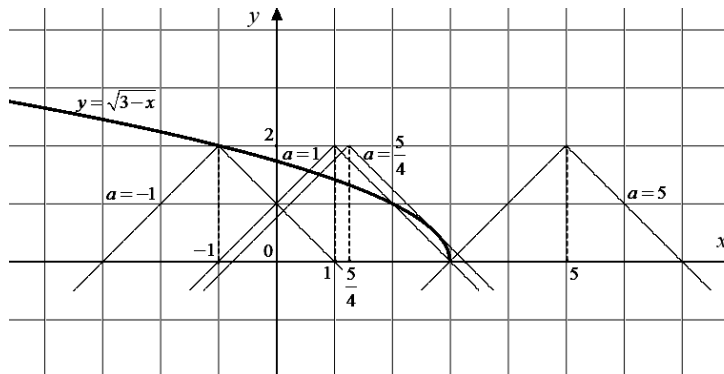
**Ответ:** 48 или 14.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $\sqrt{3-x} + |x-a| \leq 2$  является отрезок.

**Решение.**

Перепишем неравенство в виде  $\sqrt{3-x} \leq 2 - |x-a|$ , и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных  $a$ , получаем:  $-1 < a < 1$  или  $1,25 \leq a < 5$ .

**Ответ:**  $(-1; 1) \cup [1,25; 5)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери или приобретения одного из значений параметра	3
Получен ответ: $-1 < a < 5$ (возможно включение концов). В решении представлена правильная графическая интерпретация или соответствующие ей равносильные преобразования	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра	1
Все ситуации, отличные от описанных выше	0

**С6** Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

**Решение.**

Тип А: 2 автобуса  $n$  – рейсов каждый  $m + 7$  – человек в автобусе  
 Тип В: 3 автобуса  $n - 1$  – рейс  $m$  – человек

$$3(n - 1)m = 2n(m + 7)$$

$$3mn - 3m = 2nm + 14n$$

$$mn - 3m = 14n$$

$$m(n - 3) = 14n$$

$$m = \frac{14n}{n-3} = \frac{14(n-3) + 42}{n-3} = 14 + \frac{42}{n-3}, \text{ следовательно надо найти делители } 42.$$

$$n - 3 = 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42.$$

Если  $n - 3 = 1$ , то получаем  $n = 4$ ,  $m = 56$ , а всего школьников 504.

$n = 5$ ,  $m = 35$ , то школьников 420;

$n = 6$ ,  $m = 28$ , то школьников 420;

$n = 9$ ,  $m = 21$ , то школьников 504;

$n = 10$ ,  $m = 20$ , то школьников 540;

$n = 17$ ,  $m = 17$ , то школьников 816;

$n = 45$ ,  $m = 15$ , то школьников 1980.

**Ответ:** 1980.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ, возможно, неверный из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора, основанная на свойствах делимости	3
Ответ, возможно, неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием аналитических соображений	2
Решения ищутся прямым перебором без обоснований и ограничений. Ответ верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0